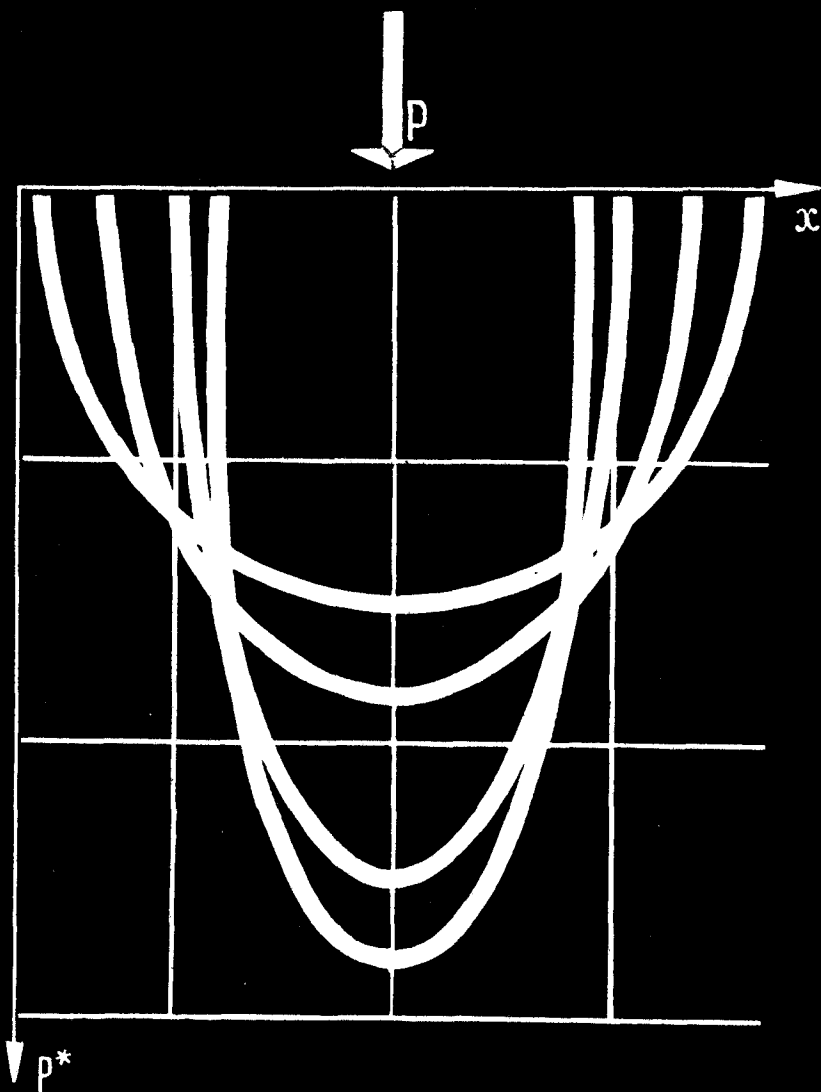


И. Е. Прокопович В. А. Зедгенидзе

# ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ



2/3

1180

И. Е. Прокопович, В. А. Зедгенидзе

# ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

458842



МОСКВА  
СТРОЙИЗДАТ  
1980

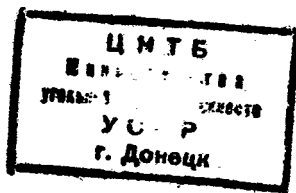
Печатается по решению секции литературы по строительной физике и строительным конструкциям редакционного совета Стройиздата.

Прокопович И. Е., Зедгенидзе В. А. Прикладная теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1980. — 240 с.

Приведены основные положения теории ползучести строительных материалов, а также практические методы расчета конструкций гражданских и промышленных зданий, гидротехнических и мостовых сооружений на длительные воздействия — нагрузки и вынужденные деформации. Описаны математические модели отдельных характеристик длительных деформаций, в частности деформации бетонов, даны их статистические оценки и практические рекомендации по определению соответствующих параметров.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Табл. 34, ил. 58, список лит.: 145 назв.



## Введение

Решения XXV съезда Коммунистической партии Советского Союза предусматривают глубокие качественные сдвиги в структуре и техническом уровне народного хозяйства, существенное изменение его облика. В строительной индустрии одним из направлений дальнейшего прогресса является снижение массы, трудоемкости и стоимости, а также повышение качества конструкций зданий и сооружений. В выполнении этого существенную роль играет более строгий подход к проектированию, более полный учет всех возможностей и реальных свойств применяемых материалов. В частности, весьма важны отказ от представления о стационарности состояний строительных конструкций, правильное понимание и учет особенностей их поведения, связанных с длительным деформированием под нагрузками, или, как говорят, с ползучестью.

Основы современной теории ползучести заложены Л. Больцманом и В. Вольтерра, сформулировавшими линейные зависимости, получившие название наследственных, и создавшими достаточно общий математический аппарат. Существенный вклад в создание теории упругой наследственности внесли А. А. Ильюшин, А. Ю. Ишлинский, А. К. Малмейстер, Ю. Н. Работнов, А. Р. Ржаницын, М. И. Розовский и другие ученые. Поскольку для этой теории характерны инвариантные во времени ядра ползучести и соблюдение замкнутого цикла Вольтерра, то она в классической форме неприменима к стареющим материалам.

Последнее, вероятно, и послужило основной причиной появления теории ползучести, названной «теорией старения» и созданной применительно к расчету железобетонных конструкций. Эта теория основана на предложенной С. Уитни гипотезе о «параллельности» кривых простой ползучести и развита Ф. Дишингером. Существенный вклад в теорию старения внесли В. А. Бовин, Н. А. Буданов, И. И. Улицкий, А. Б. Голышев, Я. Д. Лившиц, О. Я. Берг и Е. Н. Щербаков. Несмотря на ряд существенных недостатков, связанных с гипотезой о «параллельности» и соответствующей полной необратимостью деформаций ползучести, эта теория привлекает многих авторов простотой решений, наиболее существенно проявляющейся в нелинейном варианте.



Весьма существенным шагом в развитии теории длительного деформирования стало создание наследственной теории старения (теории упругоползучего тела, теории Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна). В основе этой теории лежат зависимости и уравнения, записанные Н. Г. Масловым применительно к расчету температурных напряжений в бетонных массивах, т. е. к задаче, решение которой не может быть получено на основе теории упругой наследственности или теории старения. Н. Х. Арутюнян выполнил построение законченной математической теории и показал эффективность ее применения для расчета железобетонных конструкций. Для этой теории характерен учет влияния возраста материала на упругомгновенные деформации и ползучесть, а также частичной необратимости длительных деформаций, связанной со старением. В последнее время эта теория развивается весьма интенсивно, причем наиболее существенные результаты получены в трудах С. В. Александровского, В. М. Бондаренко, П. И. Васильева, А. А. Гвоздева, К. С. Карапетяна, А. П. Кудзиса, М. М. Манукяна, Н. Я. Панарина, И. Е. Прокоповича, А. Р. Ржаницына и М. М. Розовского.

Изложение в книге проводится на базе наследственной теории старения. Используются физические зависимости, построенные на феноменологической основе, т. е. на основе кривых зависимостей напряжения — деформации, полученных опытным путем. Данные о влиянии строения материала привлекаются только для разъяснения качественной картины особенностей длительного деформирования. В связи с ограниченностью объема в книге не затрагиваются вопросы, связанные с использованием реологических моделей [108, 143, 144], моделированием ползучести поляризационно-оптическим методом [113], а также виброползучесть [49] и ряд других вопросов.

В книге в основном рассмотрена теория ползучести бетона применительно к расчету бетонных и железобетонных конструкций. Это можно объяснить следующими причинами: во-первых, бетон все еще является основным строительным материалом и, судя по прогнозам, будет оставаться таковым в обозримом будущем. Благодаря освоению производства высокомарочных и специальных цементов, совершенствованию технологии изготовления бетона, индустриализации производства изделий и развитию всех отраслей народного хозяйства область применения бетонных и железобетонных конструкций непрерывно расширяется. Во-вторых, вопросы ползучести и длительного сопротивления бе-

тона проработаны значительно полнее, чем других строительных материалов. Естественно, что результаты, полученные для бетона и железобетона, в феноменологическом плане имеют достаточно общий характер. Для иллюстрации этого в книге на основе работ Ф. П. Белянкина, Ю. М. Иванова и В. Ф. Яценко и других исследователей приводятся краткие сведения о ползучести древесины и иллюстрируется соответствие в описании длительного деформирования и сопротивления двух рассмотренных строительных материалов.

Глава I написана авторами совместно, главы II, III, IV, VI, а также п. 4 главы V написаны И. Е. Прокоповичем, главы V и VII — В. А. Зедгенидзе.

Авторы пользуются приятной возможностью выразить глубокую благодарность проф. А. А. Гвоздеву, просмотревшему рукопись книги и сделавшему ценные замечания по ее содержанию.

## ГЛАВА 1

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ И СОПРОТИВЛЕНИЕ БЕТОНА ПРИ ДЛИТЕЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 1. ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ И ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА

Строение бетона обуславливает особенности его деформативности и прочности. Бетон представляет собой неоднородное тело, состоящее из заполнителей и цементного камня. Цементный камень в свою очередь состоит из кристаллического сростка и аморфной массы — геля. Характерной особенностью строения бетона является большое количество пор различных размеров, образующихся в результате несовершенства укладки бетонной смеси и постепенного расходования воды, введенной при замесе, на гидратацию цемента и испарение. С момента затворения бетона начинаются процессы гидролиза, гидратации, коагуляции, обуславливающие твердение цементного камня. Во время этих процессов происходит непрерывная трансформация цементного камня, приводящая к повышению прочности и жесткости бетона. Изменение свойств бетона во времени вследствие затвердения цементного камня называют старением бетона. Интенсивность старения бетона определяется целым рядом факторов и в первую очередь составом цемента, водоцементным отношением, влажностью и температурой среды.

В связи с явлением старения введено понятие «возраст бетона». Под возрастом понимается промежуток времени между моментом изготовления, точнее моментом, начиная с которого бетон может считаться твердым телом, и рассматриваемым моментом времени.

Обычно возраст бетона обозначается: в момент начала формирования напряжений  $\tau_1$ , в момент приращения напряжений  $\tau$ , в момент наблюдения  $t$ .

Бетон представляет собой неоднородное и анизотропное тело. Анизотропия проявляется в том, что в большинстве случаев при действии напряжений перпендикулярно слоям укладки прочность бетона оказывается меньшей, а деформативность большей, чем при действии напряжений параллель-

по этим слоям [50]. А. А. Гвоздев объясняет причину анизотропии бетона образованием под зернами крупного заполнителя «лужиц», заполненных водой.

Естественно, что влияние неоднородности на средние характеристики прочности и деформативности малосущественно в случаях, когда размеры зерен крупного заполнителя значительно меньше размеров сечения. Для обычного тяжелого бетона влияние анизотропии тоже относительно невелико [85]. Поэтому в феноменологической теории ползучести бетон рассматривается как однородное и изотропное тело.

Характер зависимости между деформациями и напряжениями бетона при простом сжатии в условиях кратковременных испытаний на гидравлическом прессе показан на рис. 1. В соответствии с теорией, развитой О. Я. Бергом [12], удобно считать, что полная деформация ползучести бетона при сжатии состоит из четырех компонентов:

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_{II} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_y$  — упругие деформации;  $\varepsilon_{II}$  — деформации ползучести;  $\varepsilon_1$  — пластические деформации второго рода;  $\varepsilon_2$  — псевдопластические деформации.

Такое разделение обосновано положением характерных (параметрических) точек на кривой, представляющей зависимость между сжимающими напряжениями  $\sigma$  и изменением времени прохождения ультразвукового импульса  $\Delta t$  в направлении, нормальном к оси образца, вдоль которой прикладывается нагрузка (см. рис. 1). Поскольку скорость про-

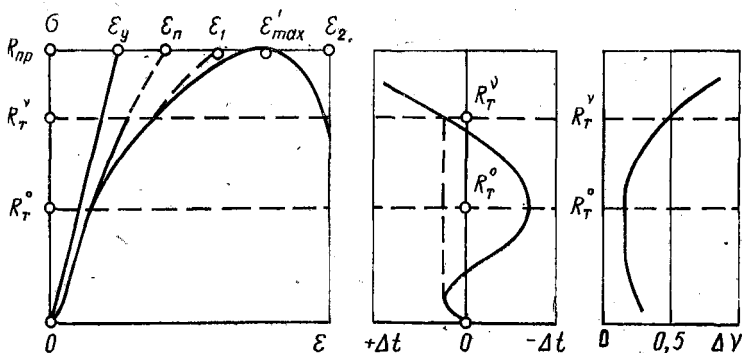


Рис. 1. Зависимости между напряжениями  $\sigma$ , относительными деформациями  $\varepsilon$ , значениями дифференциального коэффициента поперечных деформаций  $\Delta v$  и изменением времени прохождения ультразвукового импульса  $\Delta t$

хождения ультразвука связана с упругими свойствами и особенно с нарушениями структуры, то зависимость между  $\sigma$  и  $\Delta t$  называется диаграммой состояния материала. Параметрические точки рассматриваются: первая  $R_T^0$  — как граница микроразрушений, вторая  $R_T^y$  — как условная верхняя граница микроразрушения. В качестве показателя состояния бетона используется и зависимость между значениями сжимающих напряжений и дифференциального коэффициента поперечных деформаций  $\Delta v = \Delta \epsilon_2 / \Delta \epsilon_1$ , где  $\Delta \epsilon_2$  и  $\Delta \epsilon_1$  — приращения поперечной и продольной деформаций на данной ступени нагрузки [16]. Характер кривых  $\Delta t = f_1(\sigma)$  и  $\Delta v = f_2(\sigma)$  свидетельствует об уплотнении бетона при  $0 < \sigma < R_T^0$ , разуплотнении при  $R_T^0 < \sigma < R_T^y$ , формировании деформаций  $\epsilon_2$  и прогрессирующем разрушении при  $\sigma > R_T^y$ . Для расчетного определения положений параметрических точек применительно к бетону на тяжелых заполнителях рекомендуются формулы ( $\tau_1 = 28$  сут):

$$R_T^0 = R_{пр} (0,35 \lg 10R_{пр} - 0,5); \quad R_T^y = R_{пр} (0,35 \lg 10R_{пр} - 0,175), \quad (2)$$

где  $R_{пр}$ ,  $R_T^0$  и  $R_T^y$  — в мегапаскалях.

Для случая длительных воздействий также характерны составляющие деформаций, входящие в выражение (1). В теории ползучести бетона для описания длительного деформирования сумму деформаций ползучести, пластических деформаций второго рода, а также псевдопластических деформаций называют деформациями ползучести и обозначают  $\epsilon_{п}$ .

В настоящее время еще нет единой теории, объясняющей явление ползучести бетона на физико-химической основе. Вероятно, наиболее правильно считать, что ползучесть зависит от ряда факторов. При низких напряжениях — это вязкость, изменение влажности в процессе высыхания и воздействия внешней нагрузки гелевой составляющей, а также капиллярные явления. При высоких напряжениях существенна роль образования и развития микротрещин [12, 50, 124].

Бетону свойственны такие явления, как усадка и разбухание. На поведение бетона в процессе эксплуатации основное влияние оказывают составляющие усадки, связанные с уменьшением объема затвердевшего цементного камня, а также с удалением капиллярной структурно-связанной и адсорбированной воды. В дальнейшем сумма этих состав-

ляющих и называется усадкой; относительная деформация усадки обозначается  $\varepsilon_{yc}$  [68].

В силу старения, деформации бетона являются функциями  $\tau$  и  $t$ :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y(\tau); \varepsilon_{II} = \varepsilon_{II}(t, \tau); \varepsilon_{yc} = \varepsilon_{yc}(t, \tau_w), \quad (3)$$

где  $\tau_w$  — возраст бетона по окончании влажного хранения.

В условиях эксперимента возникают задачи разделения слагаемых деформаций, входящих в сумму (1), а также определения соответствующих физико-механических характеристик. Дело осложняется еще и тем, что на некоторые вопросы нет единой точки зрения.

В теории ползучести рассматриваются упругомгновенные деформации, т. е. деформации, развивающиеся при достаточно быстром, но статическом приложении нагрузки; соответственно вводится понятие «модуль упругомгновенных деформаций». При практических расчетах бетонных и железобетонных конструкций используется понятие «начальный модуль деформаций», т. е. модуль, соответствующий деформациям, включающим часть ползучести.

В рекомендациях [68] предлагается определять упругомгновенные деформации как сумму деформаций, сформировавшихся при увеличении нагрузки на всех ступенях загрузки образца (10—20 ступеней при выдержках на каждой 5 мин). Такой способ является приближенным, но он удобен при практическом применении. Значение модуля упругомгновенных деформаций достаточно надежно можно разыскать с помощью ультразвукового способа.

Основные физические зависимости феноменологической теории ползучести, как правило, базируются на кривых ползучести образцов-близнецов, получаемых при постоянных во времени напряжениях, влажности и температуре окружающей среды, или, как говорят, — на кривых простой ползучести.

Поскольку в условиях эксперимента, выполняемого с целью построения кривых простой ползучести, можно замерить только полные длительные деформации нагруженных образцов, то необходима методика разделения ползучести и усадки. Естественно, что решение вопроса о методике разделения этих деформаций возможно только на основе строгого определения понятий ползучести и усадки. Общеприняты такие определения [7, 16, 85, 119], имеющие феноменологический характер. Ползучестью бетона называется разность между полными деформациями нагруженного образца, раз-

вивающимися за определенный отрезок времени, и деформациями незагруженного образца-близнеца за тот же отрезок времени; при этом учитывается, что деформации незагруженного образца включают как усадку, так и деформации, вызванные изменениями температуры и влажности на протяжении опыта.

Усадкой (разбуханием) бетона называется разность между полными деформациями незагруженного образца и деформациями, вызванными изменением температуры и влажности.

Из этих определений очевидна методика экспериментального определения ползучести и усадки. Опыты показали, что при сжатии сумма длительных деформаций бетонных образцов-близнецов неизолированных ненагруженных и изолированных нагруженных меньше деформаций неизолированных нагруженных образцов-близнецов. Соответствующую разность деформаций было предложено называть «напряженной усадкой»  $\varepsilon_{н.ус}$  [1]. В связи с этим рекомендуется определять ползучесть бетона как разность между длительными деформациями нагруженного неизолированного образца и суммой деформаций ненагруженного образца и напряженной усадкой [68].

Выделение напряженной усадки из ползучести уместно при изучении явлений, происходящих при длительном деформировании бетона, поскольку позволяет дифференцировать и более детально описать эти явления [68]. Однако отказ от общепринятого определения понятия ползучести в настоящее время явно нерационален: во-первых, практически все накопленные экспериментальные данные и проработанные методики решений задач расчета конструкций основаны на этом определении; во-вторых, еще нет представления о классе задач, при решении которых необходимо выделение напряженной усадки.

В дальнейшем будем использовать общепринятое определение ползучести, что ни в коей мере не отрицает необходимости и возможности учета при определении деформаций ползучести влияния основных факторов, предопределяющих протекание физико-механических процессов в бетоне при длительном действии нагрузки. Имеющиеся практические рекомендации [41, 69, 13, 119] связывают значения ползучести и усадки бетона с влиянием многих факторов. В частности, ползучесть бетона связана с влажностью окружающей среды, размерами поперечного сечения образца и уровнем действующих сжимающих напряжений, т. е. с ос-

новными факторами, определяющими развитие напряженной усадки. Это дает возможность учитывать  $\epsilon_{н.ус}$ , входящую в качестве составляющей в деформации ползучести бетона, определяемые по общепринятой методике.

Поскольку на длительные деформации бетона влияет большое число факторов<sup>1</sup>, то из-за отсутствия физико-химической теории, устанавливающей соответствующие связи, методики расчетного определения ползучести и усадки неизбежно должны базироваться на вероятностно-статистическом подходе. Исследования, выполненные в последнее время, после появления известных предложений Ф. Леонгардта и И. И. Улицкого, посвящены углубленному рассмотрению возможностей построения различных математических моделей характеристик ползучести и усадки бетона, их статистическому обоснованию, а также созданию более надежных практических рекомендаций. Ползучесть и усадка классифицированы как нестационарные мультипликативные случайные процессы, определены основные статистические характеристики этих процессов, показана приемлемость нормального закона для описания распределений длительных деформаций, установлены весьма компактные приближенные связи, разработаны и статистически оценены практические рекомендации [13, 69].

Тем не менее имеются и вопросы, требующие серьезной доработки. Прежде всего принятая удобная и наглядная математическая модель длительных деформаций, основанная на независимости влияния всех факторов [см. ниже (27)], не может считаться вполне совершенной. Предпринятая автором совместно с М. М. Заставой попытка достаточно полной статистической оценки возможных рассеиваний вычисленных величин при использовании такой модели привела к коэффициентам вариации, равным 0,5—0,6. Однако при проверке модели путем сопоставления результатов расчета с доступными опытными данными значение этого коэффициента было получено равным 0,15. Имеющиеся предложения по построению полиномиальных моделей, бесспорно, полезны [60], но еще недостаточно проработаны для практического использования. Следует также иметь в виду, что вероятностно-статистическому изучению в основном подвергались данные, относящиеся к сжимающим напряжениям умеренного уровня  $\eta = \sigma(\tau_1)/R(\tau_1) \leq 0,5$ .

<sup>1</sup> При сжатии статистически значимы с вероятностью 0,95: для ползучести — 11 факторов, для усадки — 10.



Описание особенностей длительного деформирования бетона в книге выполнено на основе как статистических данных, так и материалов отдельных опытов, как правило, подтвержденных результатами других исследований. Более подробный перечень накопленных экспериментальных данных о длительных деформациях бетона и их анализ с различных точек зрения приведены в обзорах [4, 9, 13, 39, 50].

## 2. ВЛИЯНИЕ УРОВНЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА. ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

На рис. 2 изображены кривые простой ползучести при различных уровнях сжимающих напряжений, построенные по результатам II серии опытов А. В. Яшина [138]. В этой серии опытов изучалось поведение образцов-близнецов размером  $7 \times 7 \times 35$  см из тяжелого бетона. Образцы в возрасте свыше  $\tau_1 = 180$  сут в течение 1—1,5 ч загружались постоянными длительными нагрузками, действовавшими на протяжении 2—3 лет (за исключением случаев более раннего разрушения) и создавшими сжимающие напряжения, расположенные в интервале относительной прочности  $0,42 \leq \eta \leq 0,93$ .

На рис. 3 показаны кривые, представляющие зависимости между значениями постоянных сжимающих напряжений

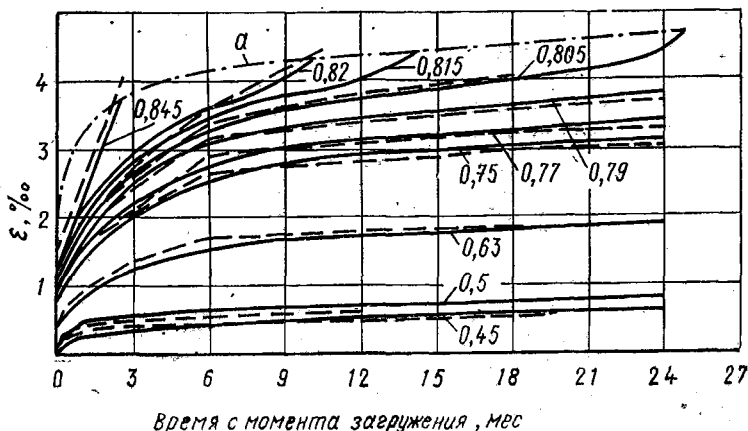


Рис. 2. Кривые простой ползучести бетона при различных  $\eta$   
а — граница деформаций, соответствующих разрушению

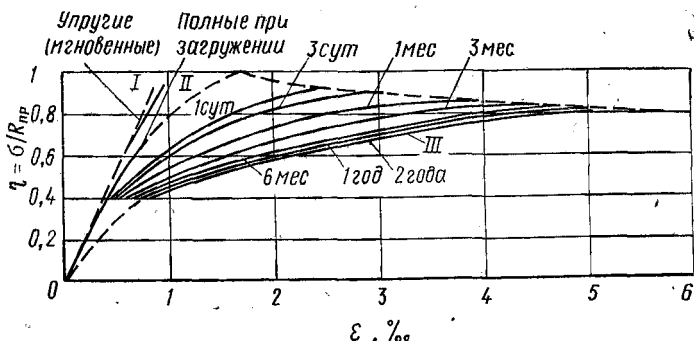


Рис. 3. Зависимости между уровнем напряжения  $\eta$  и относительными деформациями  $\varepsilon$ , сформировавшимися при разной продолжительности действия нагрузки

и деформаций при различных продолжительностях постоянных нагрузок (изохронные кривые), соответствующие кривым простой ползучести на рис. 2.

Кривая I на рис. 3 ограничивает упругие деформации, принятые в данном случае равными сумме деформаций, возникающих в процессе приложения каждой ступени нагрузки. Отчётливо видно, что зависимость между напряжениями и упругими (согласно [68], упругомгновенными) деформациями практически линейна [4]. Кривая II соответствует деформациям, сформировавшимся в процессе загрузки и включающими как упругие деформации, так и сумму деформаций ползучести, образовавшихся при выдержках на каждой ступени (3—5 мин). Кривая III ограничивает деформации образцов, не разрушившихся за время опыта. Очевидно, что горизонтальные отрезки, расположенные между кривыми I и III, представляют деформации ползучести.

Нетрудно заметить, что зависимость между напряжениями и деформациями, как полными, так и ползучести, — нелинейна. Исследования, проведенные для уточнения характера этой зависимости, показали, что степень нелинейности возрастает при увеличении относительного уровня сжимающих напряжений; при  $\sigma \leq R_T^0$  нелинейность относительно мало существенна [16].

На основании ранее сказанного можно представить относительные деформации ползучести в виде суммы:

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{л}$  и  $\varepsilon_{н}$  — условно линейная и условно нелинейная составляющие деформации ползучести.

В теории ползучести бетона применяется способ разделения линейной и нелинейной составляющих простой ползучести, предложенный А. Р. Мельником [68]. Введено понятие удельной относительной деформации ползучести, определяемой как значение относительной деформации к моменту  $t$ , вызванной напряжением  $\sigma$  ( $\tau_1$ ), действующим с момента  $\tau_1$ , и отнесенной к единичному напряжению,

$$C(\sigma, t, \tau_1) = \frac{\varepsilon_{п}(t, \tau_1)}{\sigma(\tau_1)}. \quad (5)$$

В силу (4)  $C(\sigma, t, \tau_1)$  можно представить в виде суммы [6,28]:

$$C(\sigma, t, \tau_1) = C_{л}(t, \tau_1) + C_{н}(\sigma, t, \tau_1), \quad (6)$$

где  $C_{л}(t, \tau_1)$  и  $C_{н}(\sigma, t, \tau_1)$  — линейная и нелинейная составляющие удельной относительной деформации ползучести.

Функция  $C_{л}(t, \tau_1)$  определяется при очень низком уровне напряжений построением экспериментальных кривых зависимостей  $C(\sigma_i, t, \tau_1)$  и экстраполяцией этих кривых на ось  $C(0, t, \tau_1)$  (рис. 4)

$$\eta \rightarrow 0 \quad \lim C(\sigma, t, \tau_1) \rightarrow C_{л}(t, \tau_1). \quad (7)$$

На рис. 4 изображены типичные кривые  $C(\sigma, t, 17)$ ,  $C_{л}(t, 17)$  и  $C_{н}(\sigma, t, 17)$ , заимствованные из [68]. Последние кривые построены как разности первых и второй.

Из рассмотрения кривых ползучести на рис. 2 можно сделать ряд выводов, существенных для построения теории длительного деформирования. Прежде всего при  $t - \tau_1 = 0$  деформации ползучести  $\varepsilon_{п}(0) \neq 0$ . Связано это с наличием части ползучести, весьма быстро натекающей после мгновенного нагружения образца, в результате чего создается впечатление о плавном переходе от скорости упругого деформирования к начальной скорости ползучести; при принятом масштабе рисунка кривая ползучести на начальном участке сливается с вертикалью  $\varepsilon_{п} = 0$ . При построении феноменологической теории к быстронатекающей ползучести удобно относить и деформации  $\varepsilon_0$  [12], развивающиеся в начале приложения нагрузки.

Наличие быстронатекающей ползучести бетона — одна из причин введения в теорию расчета железобетонных конструкций понятия кратковременного действия нагрузки. Считается, что кратковременное действие нагрузки сопро-

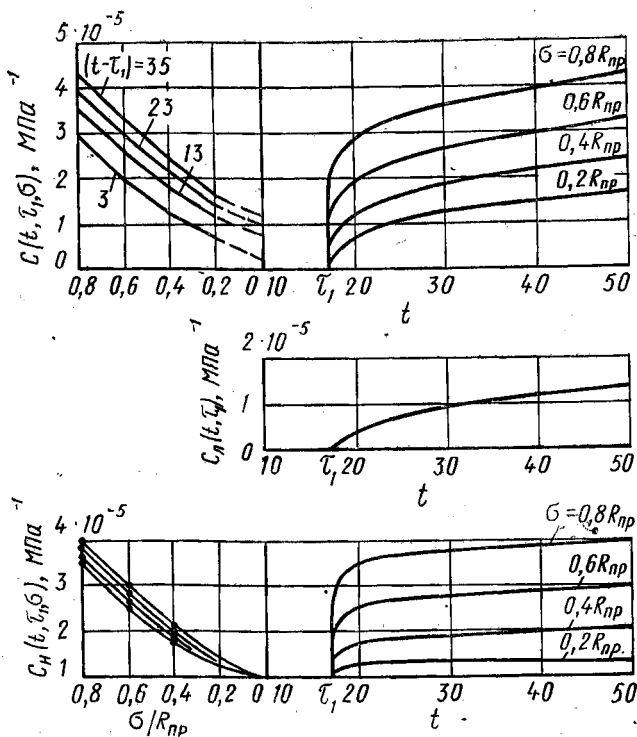


Рис. 4. Типичные кривые удельных относительных деформаций ползучести  $C(t, \tau_1, \sigma)$ , линейных удельных относительных деформаций ползучести  $C_n(t, \tau_1)$  и нелинейной составляющей удельных деформаций ползучести  $C_n(t, \tau_1, \sigma)$  при возрасте бетона к моменту наблюдения  $\tau_1 = 17$  сут

воздается проявлением не только упругомгновенных деформаций, но и части быстронатекающих деформаций ползучести. Для связи этих деформаций с напряжениями условно используется модуль упругопластических деформаций, равный  $\bar{E} = \bar{\nu}E$ , причем  $\bar{\nu} < 1$  [см. (47) и (58)].

Далее из рис. 2 видно, что характер развития деформаций ползучести связан со значением  $\eta$ . В промежутке времени действия нагрузки  $t - \tau_1 \leq 2$  года кривые, соответствующие  $\eta \leq 0,79$ , имеют два характерных участка; кривые, соответствующие  $\eta \geq 0,81$ , — три. В обоих случаях на первом участке происходит относительно быстрое развитие деформаций, на втором — относительно медленное, на

третьем — наблюдается непрерывное увеличение скорости деформирования, заканчивающееся разрушением. При  $\eta > 0,83$  кривые имеют тенденцию к выравниванию, сопровождающемуся стиранием границ между участками. В образцах, находившихся под напряжениями  $\eta < 0,75$ , уменьшение скорости деформаций ползучести наблюдается до конца опытов [138].

Наличие третьего участка на кривых деформаций ползучести свидетельствует о влиянии на прочность продолжительности действия нагрузки. В связи с этим введено понятие «предел длительного сопротивления». Под пределом длительного сопротивления  $R_{пр}^* < R_{пр}$  понимается максимальное значение напряжений, при котором образец не разрушается в течение неограниченно большого периода времени.

Характер простой ползучести при уровнях напряжений, несколько меньших и больших  $\eta^* = R_{пр}^*/R_{пр}$ , позволяет предположить, что у кривой, соответствующей  $R_{пр}^*$ , при увеличении  $t - \tau_1$  второй участок постепенно выравнивается. Поскольку значение  $R_{пр}^*$  весьма существенно для решения практических задач проектирования бетонных и железобетонных конструкций, в п.3 приведены некоторые данные о длительном сопротивлении бетона.

Для дальнейшего изложения рационально сформулировать начальные и конечные условия, которым должны удовлетворять кривые простой ползучести (см. рис. 2). Анализ кривых позволяет записать эти условия так:

$$\left. \begin{aligned} t \rightarrow 0, 0 < \eta < 1, \varepsilon_{п} \rightarrow 0, \dot{\varepsilon}_{п} \rightarrow \dot{\varepsilon}_{у} \quad (\varepsilon_{п} \rightarrow \infty); \\ t \rightarrow \infty, \eta < \eta^*, \varepsilon_{п} \rightarrow \text{const}, \dot{\varepsilon}_{п} \rightarrow 0; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$t \rightarrow \infty, \eta = \eta^*, \varepsilon_{п} \rightarrow \varepsilon_{п}^* (\varepsilon_{п} \rightarrow \infty), \dot{\varepsilon}_{п} \rightarrow \text{const}; \quad (9)$$

$$t \rightarrow t^*, \varepsilon_{п} \rightarrow \varepsilon_{п}^* (\varepsilon_{п} \rightarrow \infty), \dot{\varepsilon}_{п} \rightarrow \dot{\varepsilon}^* (\dot{\varepsilon}_{п} \rightarrow \infty), \quad (10)$$

где точками сверху показаны производные по времени  $t$ ;  $\eta^* = R_{пр}^*/R_{пр}$ ;  $\varepsilon_{п}^*$  — деформация ползучести к моменту разрушения;  $t^*$  — время пребывания образца под нагрузкой до разрушения. На рис. 2 точки с координатами  $t^*$  и  $\varepsilon_{п}^*$  соединены штрихпунктирной кривой.

Дополнительные условия, стоящие в скобках, прежде всего характеризуют тенденции в развитии деформирования на начальных и конечных участках. В частности, наличие в (8) условия  $\dot{\varepsilon}_{п} \rightarrow \infty$  свидетельствует о весьма высокой скорости ползучести на начальном участке. В некоторых случаях замена действительных условий условиями, харак-

теризующими соответствующие тенденции, может упростить решение задачи без существенного ущерба для точности окончательных результатов, например принятие прямоугольной формы эпюры сжимающих напряжений в бетоне при расчете в стадии разрушения изогнутого или внецентренно-сжатого железобетонного стержня.

На рис. 4 видно, что скорость нелинейной составляющей деформаций ползучести интенсивно уменьшается на протяжении нескольких суток после загрузки; скорость линейной составляющей уменьшается значительно медленней.

Если при рассмотрении процесса достаточно большой продолжительности пренебречь особенностями развития деформаций  $\epsilon_n$  на начальном участке, то можно использовать еще один подход к записи основных зависимостей теории ползучести [7, 23]. На рис. 5 изображены кривые отношений  $k_F = \epsilon_n(\sigma, t, \tau_1) / \epsilon_n(\sigma, \tau_1 + 30, \tau_1)$ , построенные по данным, показанным на рис. 2 и 3. Отчетливо видно, что при  $\eta < \eta^* \approx 0,8$  кривые, соответствующие различным  $\eta$ , располагаются достаточно близко. Это позволяет принять предположение об аффинном подобии кривых простой ползучести, соответствующих напряжениям различных уровней, и представить выражение для  $\epsilon_n(\sigma, t, \tau_1)$  в виде [7]

$$\epsilon_n(\sigma, t, \tau_1) = F(\sigma) C(t, \tau_1), \quad (11)$$

или, что то же самое, считать справедливой формулу [см. (5)]

$$C(\sigma, t, \tau_1) = f(\sigma) C(t, \tau_1); \quad h(\sigma) = E(\sigma) / \sigma.$$

Функцию напряжений  $F(\sigma)$  удобно подбирать так, чтобы на границе условно нелинейной области выполнялись равенства  $F(\sigma) = \sigma$ ,  $f(\sigma) = 1$ . Тогда  $C(t, \tau)$  может рассматриваться как значение ползучести к моменту  $t$ , вызванной единичным напряжением  $\sigma = 1$ , приложенным в момент  $\tau_1$ , т. е. как мера ползучести.

При записи удельной относительной деформации, согласно (6), нелинейная составляющая  $\epsilon_n$  считается пропорциональной функции напряжений  $F_1[\sigma(\tau_1)]$

$$\epsilon_n(\sigma, t, \tau_1) = F_1(\sigma) C_n(t, \tau_1) \quad (12)$$

и соответственно

$$C_n(\sigma, t, \tau_1) = f_n(\sigma) C_n(t, \tau_1); \quad F_n(\sigma) = \sigma f_n(\sigma),$$

причем под  $C_n(t, \tau_1)$  понимается условная мера нелинейной составляющей деформаций ползучести.

Функции  $f_n(\sigma)$ ,  $f(\sigma)$ , а следовательно, и  $F_1(\sigma)$  подбираются на основании экспериментальных данных, соответ-

ствующих зависимостям  $C_H(\sigma, t, \tau_1)$  и  $C(\sigma, t, \tau_1)$  от  $\eta = \sigma/R_{пр}$  (см. рис. 4 и 6). Поскольку любую плавную функцию в окрестностях данной точки можно разложить в степенной ряд, то удобны аппроксимации

$$\left. \begin{aligned} f_H(\sigma) &= b_1 \sigma + b_2 \sigma^2 + \dots + b_m \sigma^m; \\ f(\sigma) &= \beta_0 + \beta_1 \sigma + \beta_2 \sigma^2 + \dots + \beta_m \sigma^m. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Имеются рекомендации о представлении  $f_H(\sigma)$  в виде  $f_H(\sigma) = b_m \sigma^m$ , причем для тяжелого бетона обычно  $1,5 \leq m \leq 2,5$  [68]. Достаточно широко распространена ап-

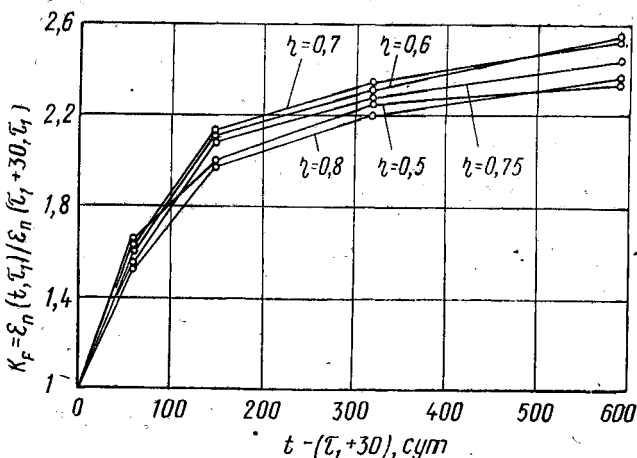


Рис. 5. Отношения  $k_F = \varepsilon_n(t, \tau_1) / \varepsilon_n(\tau_1 + 30, \tau_1)$  при различных уровнях сжимающих напряжений  $\eta = \sigma/R_{пр}$

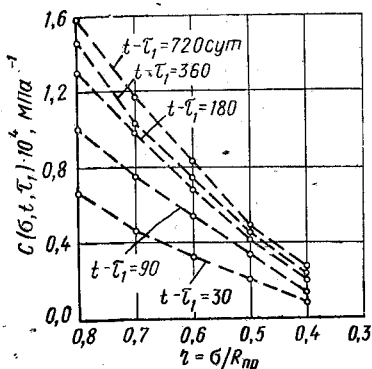


Рис. 6. Экспериментальные кривые зависимости  $C(\sigma, t, \tau_1)$  от  $\eta, \tau_1 > 180$  сут.

проксимация  $F(\sigma)$  в виде полинома второй степени [7, 119, 134]:

$$F[\sigma(\tau_1)] = [1 + \beta_1 \sigma(\tau_1)] \sigma(\tau_1). \quad (14)$$

Размерность коэффициентов, входящих в эти формулы:  $\beta_0$  — безразмерный;  $b_1$  и  $\beta_1$ , МПа<sup>-1</sup>;  $b_2$  и  $\beta_2$ , МПа<sup>-2</sup>, ...,  $b_m$  и  $\beta_m$ , МПа<sup>-m</sup>.

Результаты обработки экспериментальных данных показали, что функцию  $F(\sigma)$  для высокопрочных бетонов при  $\tau_1 \geq 28$  сут можно связать с величинами  $\eta$  и  $\eta_T = \sigma(\tau_1)/R_T^0$  [16]:

$$F[\sigma(\tau_1)] = \left[ 0,9 + \frac{0,045}{(0,45 + \eta_T) - \sigma(\tau_1) R_{\text{пр}}^{-1}} \right] \sigma(\tau_1);$$

$$\sigma(\tau_1) R_{\text{пр}}^{-1} \geq \eta_T. \quad (15)$$

Очевидно, что при  $\eta_T - \eta \rightarrow 0$ ;  $F(\sigma) \rightarrow \sigma$ ;  $0,45 + \eta_T - \eta \rightarrow 0$ ,  $F(\sigma) \rightarrow \infty$  и в силу (11), при любых продолжительностях действия нагрузки  $C(\sigma, t, \tau_1) \rightarrow \infty$ , что нереально. Следовательно, при использовании формулы (15) необходимо: 1) определять  $C(t, \tau_1)$  при напряжениях, соответствующих  $\eta = \eta_T$ ; 2) рассматривать напряжения, при которых выполняется неравенство  $0,45 + \eta_T - \eta > 0$ . Приравнивание правых частей (14) и (15) приводит к формуле

$$\beta_1 = \frac{1}{\eta(\tau_1) R_{\text{пр}}(\tau_1)} \left[ \frac{0,045}{0,45 - \eta_T - \eta(\tau_1)} - 0,1 \right], \quad (16)$$

показывающей, что коэффициент  $\beta_1$  является функцией призмочности бетона в момент приложения нагрузки и относительно уровня напряжений. Такой же вывод, независимо от [16], был получен при разработке рекомендаций [119]. Значения  $\beta_1$ , рассчитанные согласно (17), приведены в табл. 1.

В работах [20, 23] для аппроксимации функции  $F(\sigma)$  предлагаются зависимости:

$$F(\sigma) = b \left( \frac{\sigma}{R} \right)^m; \quad F(\sigma) = a + b \left( \frac{\sigma}{R} \right)^m. \quad (17)$$

В определенной степени дальнейшим развитием этих предложений является формула [132], полученная применительно к теории старения (см. п. 2 гл. III),

$$i[t, \sigma(\tau_0)] = 1 + \eta^n(t) \vartheta(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 e^{-s_1 \varphi(t, \tau_0)}, \quad (18)$$



Таблица 1. Значения коэффициентов  $\beta_1$  в формуле (14)

| Марка бетона | $\eta(\tau_1)$ | $\eta^*$ | $\eta$   |          |          |          |          |
|--------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              |                |          | 0,4      | 0,5      | 0,6      | 0,7      | 0,8      |
| М 400        | 0,356          | 0,756    | 0,000096 | 0,000354 | 0,000702 | 0,001645 | —        |
| М 600        | 0,418          | 0,818    | 0        | 0,000106 | 0,000269 | 0,00057  | 0,001668 |
| М 800        | 0,462          | 0,862    | 0        | 0,000033 | 1,000132 | 0,000287 | 0,000675 |

где  $\eta(t) = \sigma(t)/R(\tau_0)$ ;  $\vartheta_0$  — начальный параметр нелинейности;  $s_1$  — коэффициент, связанный со скоропроходящим характером нелинейной составляющей ползучести;  $\tau_0 = 0$  — момент приложения нагрузки.

Введением в  $f[t, \sigma, (\tau_0)]$  множителя  $e^{-s_1 \varphi(t, \tau_0)}$  достигается учет различия в скоростях развития линейной и нелинейной составляющих деформаций ползучести без использования специального выражения для аппроксимации  $C_n \times \times(t, \tau_1)$ . Это обстоятельство, а также наличие в формуле для  $f(\sigma)$  только трех параметров  $n$ ,  $\vartheta_0$  и  $s_1$  привело к тому, что такое выражение оказалось удобным для практического использования.

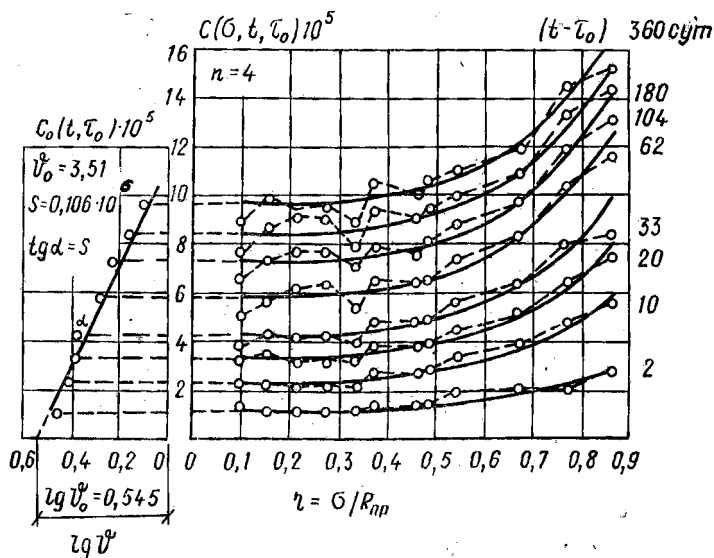


Рис. 7. Методика обработки результатов измерения деформаций ползучести для получения параметров  $\vartheta_0$  и  $s$  (опытные данные СибЦНИИСа)

—○— опыт; ——— аппроксимация

Обработка результатов значительного числа экспериментальных исследований, выполненных по методике (рис. 7), изложенной в [15], показала, что для неизолированного тяжелого бетона могут быть приняты средние значения  $n = 4$ ,  $\vartheta_0 = 3,5$ . Коэффициент  $s = s_1 E$  оказался тесно связанным с прочностью бетона в момент загрузки; для практического использования предложена зависимость  $s_1 = \frac{k_1 R}{E(\tau_0)}$ , где  $k_1 \approx 400$ ,  $R$  — кубиковая прочность бетона.

Принято считать, что при сжимающих напряжениях  $\eta \leq 0,5$  специфика влияния нелинейной составляющей деформаций ползучести бетона незначительна, и может использоваться линейная теория, т. е. теория, основанная на зависимости

$$\varepsilon_{II}(\sigma, t, \tau_1) = \sigma(\tau_1) C(t, \tau_1). \quad (19)$$

В линейной теории ползучести наряду с мерой ползучести  $C(t, \tau_1)$  используются понятия: характеристики ползучести

$$\varphi(t, \tau_1) = \frac{\varepsilon_{II}(t, \tau_1)}{\varepsilon_y(\tau_1)} = \frac{C(t, \tau_1)}{1/E(\tau_1)} = E(\tau_1) C(t, \tau_1); \quad (20)$$

предельной характеристики ползучести ( $t = \infty$ )

$$\varphi(\tau_1) = E(\tau_1) C(\infty, \tau_1) \quad (21)$$

и полной относительной деформации

$$\delta(t, \tau_1) = \frac{1}{E(\tau_1)} + C(t, \tau_1). \quad (22)$$

### 3. ДЛИТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БЕТОНА. ВЛИЯНИЕ ПРЕДШЕСТВУЮЩЕГО ЗАГРУЖЕНИЯ

Если на вертикальную ось нанести продолжительности времени пребывания образцов-близнецов под нагрузкой до момента разрушения  $t^* = t_p - \tau_1$ , а на горизонтальную ось — соответствующие уровни напряжений  $\eta = R^*(t_p - \tau_1)/R(\tau_1)$ , то можно получить кривую относительной длительной прочности  $\eta(t - \tau_1)$ . Ордината этой кривой при  $t_p - \tau_1 \rightarrow \infty$  стремится к значению относительного предела длительной прочности  $\eta^* = R^*/R$ , т. е. к относительному значению напряжения, при котором разрушение произойдет после неограниченно большого промежутка времени.

На рис. 8 нанесены экспериментальные точки, полученные в опытах И. И. Темнова [85] и показывающие зависимости между относительными растягивающими напряжениями и временем пребывания образцов-близнецов под нагрузкой  $t_p - 28$ . Кривая длительного сопротивления подобрана по этим точкам в виде зависимости

$$\eta(t_p - 28) = 0,814 + \frac{0,03538}{t_p - 28} - \frac{0,00227}{(t_p - 28)^2}, \quad (23)$$

где  $t_p$  — в сутках.

При  $t_p - 28 \rightarrow \infty$   $\eta(t_p - 28) \rightarrow \eta^*(28) \rightarrow 0,814$ , т. е. предел длительной прочности бетона при растяжении в рассмотренном случае составляет  $0,814 R_p(28)$ .

По данным этих же опытов, при растяжении влияние возраста бетона к моменту приложения нагрузки  $\tau_1$  описывается формулой

$$\eta^*(\tau_1) = 0,764 + \frac{1,6}{3,9 + \tau_1}. \quad (24)$$

Формула (24) показывает, что при увеличении  $\tau_1$  происходит уменьшение  $\eta^*(\tau_1)$  [ $\eta^*(7) \approx 0,9$ ,  $\eta^*(90) \approx 0,78$ ]. Следует полагать, что характер этой зависимости отражает влияние двух процессов. С одной стороны, длительно действующие высокие напряжения вызывают в бетоне разрушения внутренних связей, с другой — продолжающийся процесс гидратации цемента приводит к образованию новых связей.

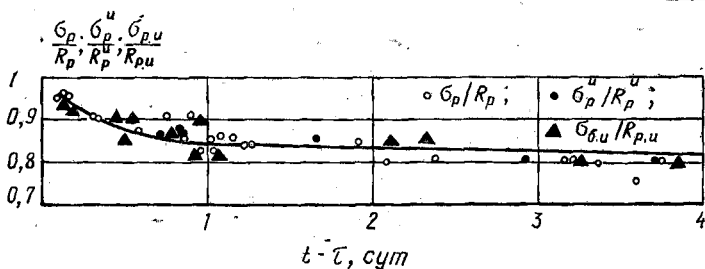


Рис. 8. Зависимость между временем пребывания образцов под нагрузкой до момента разрушения и относительными значениями растягивающих напряжений при простом растяжении неизолированных ( $\sigma_p/R_p$ ), изолированных ( $\sigma_p^u/R_p^u$ ) образцов и при изгибе неизолированных образцов ( $\sigma_{p,u}/R_{p,u}$ );  $\tau_1 = 28$  сут. Кривая  $\eta(t_p - 28)$  построена по формуле (23)

По результатам опытов [138] построена кривая относительно длительного сопротивления при сжатии, имеющая вид

$$\eta^* = R_{np}^*/R_{np} = 0,92 - 0,04 \lg(t_p - \tau_1), \quad (25)$$

где  $t_p - \tau_1$  — в сутках.

Согласно этой кривой, снижение прочности при сжатии составляет: при длительности нагрузки в 1 день — 8%, 10 дней — 12%, 100 дней — 16%, 50 лет — 25%.

По данным [16], предел длительного сопротивления бетона при сжатии связан с развитием структурных дефектов, происходящих при длительном действии нагрузки, и соответствует  $R_T^v$ . Поэтому предел длительного сопротивления старого бетона марок М400—М1000 рекомендуется подсчитывать по второй формуле (2), полагая  $R_{np}^* = R_T^v$ .

При нагрузке бетона тех же марок в возрасте  $\tau_1 = 28$ —90 сут, когда твердение еще ощутимо сказывается на положении параметрической точки  $R_T^v$ , предлагается использовать зависимость (см. табл. 1)

$$\eta^* = \eta_T + 0,4, \quad \eta_T = R_T^0/R_{np}. \quad (26)$$

В СНиП II-21-75 снижение прочности бетона при длительном сжатии учитывается коэффициентом  $m_{\delta_1} = 0,85$ .

Как отмечалось в п. 1 этой главы, в связи с анализом структурной диаграммы (см. рис. 1) при высоких сжимающих напряжениях происходит разуплотнение бетона, при низких — уплотнение. Результаты опытов [112] показали, что прочность при сжатии бетонных образцов, твердевших в условиях действия относительно невысоких сжимающих напряжений, относительно выше прочности незагруженных образцов-близнецов. Оптимальные значения интенсивности находятся в диапазоне  $\sigma < 0,45 R$  (где  $R$  — прочность бетона в момент загрузки) и зависят от расхода цемента. Эффект упрочнения существенно убывает с увеличением возраста бетона при нагружении; упрочнение бетона при сжатии, загруженного при соответствующей возрасту оптимальной интенсивности  $\tau_1 = 2/3$  сут, составило примерно 20%, а при  $\tau_1 = 3$  сут — только 5%.

К примерно аналогичным выводам приводит анализ результатов испытаний бетонных призм, загруженных в возрасте  $\tau_1 = 18$  и 30 сут нагрузкой 0,3—0,4  $R$  и хранившихся в течение 3,3—5 лет [53]. В этом случае прочность бетона возросла на 5—8% по сравнению с прочностью неза-

груженных образцов; на призмах, загруженных при  $\tau_1 > > 30$  сут, эффекта упрочнения не наблюдалось.

Имеются экспериментальные данные, свидетельствующие об отрицательном влиянии на прочность бетона при растяжении ранее длительно действовавшей сжимающей нагрузке [61].

#### 4. КРИВЫЕ ПРОСТОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И УСАДКИ. ЭТАЛОННЫЙ БЕТОН

Поскольку бетон является многофакторной системой, то для создания общего и достаточно полного представления о функции  $C(t, \tau_1)$  прежде всего необходимо выбрать значимые факторы и назначать уровни этих факторов, соответствующих какому-то среднему, эталонному бетону. Удобно к такому бетону отнести и факторы, влияющие на усадку.

В основу комплекса параметров, описывающих эталонный бетон, положены предложения А. Е. Десова [38], в которые внесены коррективы, учитывающие специфику деформаций. В частности, исключены из рассмотрения факторы, влияние которых на ползучесть и усадку не установлено или которые не поддаются нормированию (длительность перемешивания и интенсивность уплотнения бетонной смеси, сцепление цементного камня с заполнителем, нормальная плотность теста). С другой стороны, введены факторы, отсутствующие в [38], но оказывающие существенное влияние на значения длительных деформаций (температурно-влажностные условия среды в период эксплуатации).

В качестве эталонного принят бетон марки М400 на портландцементе марки М500 стандартной тонкости помола (250—300 см<sup>2</sup>/мН), гранитном щебне, изготовленный на смеси с В/Ц = 0,55 и содержанием цементного теста по массе  $P_T = 20\%$ , вибрированный, естественного твердения. Образцы из этого бетона с размером поперечного сечения 20 × 20 см ( $r = 0,2$  см<sup>-1</sup>) загружаются в возрасте 28 сут сжимающими напряжениями  $\sigma = 0,4 R_{пр}$  и хранятся при постоянной температуре и относительной влажности воздуха 70%. Измерение усадки начинается после 7-дневного хранения во влажных условиях ( $\tau_w = 7$  сут).

Предельные меры ползучести  $C(\infty, \tau_1)$  и относительная усадка  $\varepsilon_{yc}(\infty, \tau_1)$  в соответствии с методикой, разработан-

ной в Одесском инженерно-строительном институте, вычисляются по формулам [13]:

$$C(\infty, \tau_1) = C_0 \prod_{k=1}^{k=j} K_k; \quad \varepsilon_{yc}(\infty, \tau_w) = \varepsilon_{yc.0} \prod_{k=1}^{k=j} M_k; \quad (27)$$

исходя из предельных деформаций эталонного бетона, полученных в результате статистического анализа большого массива экспериментальных данных,

$$C_0 = 6,36 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}; \quad \varepsilon_{yc.0} = 373 \cdot 10^{-3}. \quad (28)$$

Значения коэффициентов  $K_k$  и  $M_k$  для тяжелых бетонов, отличных от эталонного, приведены в табл. 2 и 3.

Если к моменту определения длительных деформаций отсутствуют данные, необходимые для определения коэффициентов  $K_k$  и  $M_k$  первой группы, то для обычного тяжелого бетона рационально использовать приближенную методику ЦНИИС Минтрансстроя [69]. В соответствии с этой методикой в зависимостях (27) произведения  $C_0$  и  $\varepsilon_{yc.0}$  и коэффициентов  $K_k$  и  $M_k$  первой группы факторов заменяются величинами, подсчитанными по формулам

$$C_{н} = K_{п} \frac{B}{10R}; \quad \varepsilon_{yc.н} = K_{yc} B^v. \quad (29)$$

В этих формулах  $K_{п} = 16 \cdot 10^{-6}$ ,  $K_{yc} = 0,125 \cdot 10^{-6}$ ,  $v = 1,5$  — эмпирические коэффициенты;  $B$  — расход воды в литрах на 1000 л бетонной смеси. Возможные отклонения при использовании формул (29) приведены в статье [17].

Исследования показывают [89], что на очертание кривых ползучести при  $\sigma < 0,5 R_{пр}$  наиболее существенное влияние оказывают возраст бетона в момент загрузки и размеры поперечного сечения неизолированных образцов. Влияние последнего фактора заметно проявляется в призматических элементах, поперечные сечения которых характеризуются величиной, обратной гидравлическому радиусу  $\bar{r}$ , большей  $0,2 \text{ см}^{-1}$ .

Выражение для меры ползучести эталонного бетона естественно представить так ( $t$  и  $\tau_1$ , сут):

$$\begin{aligned} C_0(t-28) &= C_0 f(t-28, 28); \quad f(t-28, 28) = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{i=n} B_i e^{-\gamma_i (t-28)}, \end{aligned} \quad (30)$$

$f(0) \geq 0$ ,  $f(\infty) = 1$ ; неравенство относится к случаю выделения быстронатекающей части деформаций ползучести (см. рис. 2).

Таблица 2. Значения корректирующих коэффициентов для определения предельных мер ползучести тяжелых бетонов

| Группа факторов                               | Характеристики факторов и значения коэффициентов |                   |              |                 |               |       |      |
|---|--|-------------------|--------------|-----------------|---------------|-------|------|
|   | Вид цемента                                      | Портланд-цемент   | Пудцолановый | Сульфатостойкий | Глиноземистый | БТЦ   |      |
| I. Свойства и соотношения исходных материалов | $K_1$  | 1                 | 0,9          | 0,88            | 0,76          | 0,7   |      |
|   | $R_{ц}$  | 400               | 500          | 600             | 700           | 800   | 900  |
|   | $K_2$  | 1,04              | 1            | 0,96            | 0,94          | 0,91  | 0,91 |
|   | Вид крупного заполнителя                         | Гравелистый песок | Гранит       | Базальт         | Известняк     | Кварц |      |
|   | $K_3$  | 1,1               | 1            | 1               | 0,89          | 0,91  |      |
|   | $V/Ц$  | 0,3               | 0,4          | 0,5             | 0,55          | 0,6   |      |
|   | $K_4$  | 0,36              | 0,58         | 0,83            | 1             | 1,17  |      |
|   | $R_T, \%$  | 15                | 20           | 25              | 30            | 35    | 40   |
|   | $K_5$  | 0,85              | 1            | 1,25            | 1,5           | 1,7   | 1,95 |

| II. Условия приготовления и хранения бетона до загрузки | Вид уплотнения            | Вибрирование           |                     |                     |                     | Вручную           |                       |                     |  |                     |  |                    |  |
|---|---------------------------|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|-----------------------|---------------------|--|---------------------|--|--------------------|--|
|   | $K_6$                     | 1                      |                     |                     |                     | 1,3               |                       |                     |  |                     |  |                    |  |
|   | Вид тепловой обработки    | Естественное твердение |                     |                     | Пропаривание        |                   | Автоклавная обработка |                     |  |                     |  |                    |  |
|   | $K_7$                     | 1                      |                     |                     | 0,85                |                   | 0,54                  |                     |  |                     |  |                    |  |
| $\tau_i$ , дни  | 5                         | 7                      | 14                  | 28                  | 60                  | 90                | 180                   | 360 и более         |  |                     |  |                    |  |
| $K_8$   | $\frac{1,3}{1,2}$         | $\frac{1,25}{1,15}$    | $\frac{1,15}{1,05}$ | $\frac{1}{1}$       | $\frac{0,77}{0,77}$ | $\frac{0,7}{0,7}$ | $\frac{0,61}{0,61}$   | $\frac{0,55}{0,55}$ |  |                     |  |                    |  |
|   |                           |                        |                     |                     |                     |                   |                       |                     |  |                     |  |                    |  |
| III. Условия испытания (эксплуатации)                   | Марка бетона              | М 300                  |                     | М 400               |                     | М 500             |                       | М 600               |  | М 800               |  | М 1000             |  |
|   | $K_9$                     | 1,09                   |                     | 1                   |                     | 0,93              |                       | 0,92                |  | 0,92                |  | 0,92               |  |
|   | $W, \%$                   | 60                     |                     | 70                  |                     | 80                |                       | 90                  |  | 100                 |  | Вода               |  |
|   | $K_{10}$                  | 1,1                    |                     | 1                   |                     | 0,86              |                       | 0,7                 |  | 0,54                |  | 0,47               |  |
|   | $\bar{r}, \text{см}^{-1}$ | 0                      |                     | 0,1                 |                     | 0,2               |                       | 0,3                 |  | 0,4                 |  | 0,5                |  |
|   | $K_{11}$                  | $\frac{0,8}{0,82}$     |                     | $\frac{0,85}{0,95}$ |                     | $\frac{1}{1}$     |                       | $\frac{1,15}{1,02}$ |  | $\frac{1,24}{1,03}$ |  | $\frac{1,3}{1,03}$ |  |

Примечания: 1. Поправка на марку бетона носит условный характер, т. е. при анализе влияния  $R_{28}$  на  $C(\infty, \tau_i)$  меры ползучести бетона были приведены к одинаковым  $R_T, V/Ц$  и  $R_{ц}$ .

2. В числителе показаны значения  $K_8$  и  $K_{11}$  для бетонов естественного твердения, в знаменателе — для бетонов тепловой обработки.

3. Для изолированных и массивных конструкций, а также для бетонов тепловой обработки принимается

Таблица 3. Значения корректирующих коэффициентов для определения предельной усадки тяжелых бетонов

| Группа факторов                               | Характеристики факторов и значения коэффициентов |                   |                |              |                 |               |
|---|--|-------------------|----------------|--------------|-----------------|---------------|
|   | Вид цемента                                      | БТЦ               | Портландцемент | Пуццолановый | Сульфатостойкий | Глиноземистый |
| I. Свойства и соотношения исходных материалов | $M_1$  | 1,12              | 1              | 1            | 0,78            | 0,52          |
|   | $F_{ц}$ , см <sup>2</sup> /мН                    | 200               | 300            | 400          | 500             | 600           |
|   | $M_2$  | 0,93              | 1              | 1,13         | 1,35            | 1,68          |
|   | Вид крупного заполнителя                         | Гравелистый песок | Базальт        | Гранит       | Известняк       | Кварц         |
|   | $M_3$  | 1                 | 1              | 1            | 1               | 0,8           |
|   | $V/Ц$  | 0,3               | 0,4            | 0,5          | 0,55            | 0,7           |
|   | $M_4$  | 0,695             | 0,845          | 0,94         | 1               | 1,2           |
|   | $P_T$ , %  | 15                | 20             | 25           | 30              | 40            |
|   | $M_5$  | 0,9               | 1              | 1,2          | 1,45            | 2,1           |

| II. Условия приготовления и хранения бетона до загрузки | Вид уплотнения               | Вибрирование           |                     |                     | Вручную             |                       |                     |
|---|------------------------------|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
|   | $M_6$                        | 1                      |                     |                     | 1,1                 |                       |                     |
|   | Вид тепловой обработки       | Естественное твердение |                     | Пропаривание        |                     | Автоклавная обработка |                     |
|   | $M_7$                        | 1                      |                     | 0,85                |                     | 0,54                  |                     |
|   | $\tau_w$ , дни               | 1                      | 3                   | 5                   | 7                   | 10                    | 14 и более          |
|   | $M_8$                        | $\frac{1,11}{1}$       | $\frac{1,09}{0,98}$ | $\frac{1,04}{0,94}$ | $\frac{1}{0,9}$     | $\frac{0,96}{0,86}$   | $\frac{0,93}{0,84}$ |
| III. Условия эксплуатации (эксплуатации)                | $W$ , %                      | 50                     | 60                  | 70                  | 80                  | 90                    |                     |
|   | $M_9$                        | 1,35                   | 1,2                 | 1                   | 0,84                | 0,6                   | —                   |
|   | $\bar{r}$ , см <sup>-1</sup> | 0                      | 0,1                 | 0,2                 | 0,3                 | 0,4                   | 0,5                 |
|   | $M_{10}$                     | $\frac{0,9}{0,21}$     | $\frac{0,76}{0,73}$ | 1                   | $\frac{1,15}{1,03}$ | $\frac{1,22}{1,05}$   | $\frac{1,38}{—}$    |

Примечания: 1. В числителе — значения  $M_8$  и  $M_{10}$  для бетонов естественного твердения, в знаменателе — для бетонов тепловой обработки.

2. Для бетонов на сульфатостойком цементе  $M_9 = 1$ .



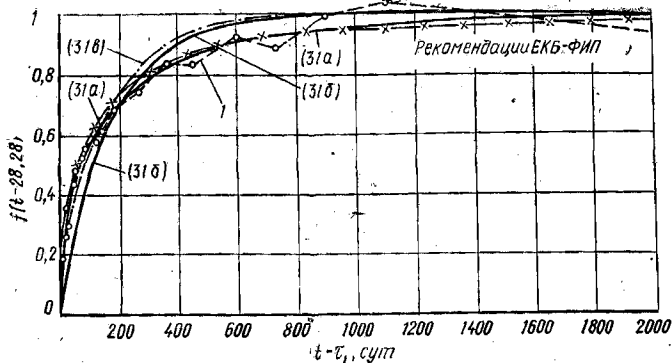


Рис. 9. Статистическая кривая *l* нарастания меры ползучести эталонного бетона во времени и ее аппроксимации

Для получения статистическим путем кривой ползучести тяжелого бетона и соответствующей функции  $f(t - \tau_1)$  имеющиеся опытные данные (результаты 1220 исследований) были приведены к параметрам эталонного бетона. В результате построена эмпирическая линия регрессии функции  $f(t - \tau_1)$ , изображенная на рис. 9 в виде ломаной. На этом же рисунке нанесены кривые, построенные по различным модификациям выражения

$$f(t - \tau_1, \tau_1) = 1 - B_1 e^{-\gamma_1 (t - \tau_1)} - B_2 e^{-\gamma_2 (t - \tau_1)}, \tau_1 = 28 \text{ сут.} \quad (31)$$

Значения коэффициентов, входящих в (31), приведены в табл. 4.

Из рис. 9 видно, что кривая (31 а) (см. табл. 4) хорошо соответствует опытным данным в течение всего периода деформирования и, следовательно, может применяться при любой продолжительности действия нагрузки. Кривая  $f(t, 28)$ , построенная по Рекомендациям ЕКБ — ФИП, также удовлетворительно совпадает с опытными данными. Кривая

Таблица 4. Значения коэффициентов в формуле (31)

| Модификация формулы (31) | $B_1$ | $\gamma_1, 1/\text{сут}$ | $B_2$ | $\gamma_2, 1/\text{сут}$ |
|--------------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------|
| (31а)                    | 0,28  | 0,0018                   | 0,57  | 0,01                     |
| (31б)                    | 1     | 0,006                    | 0     | —                        |
| (31в)                    | 0,85  | 0,006                    | 0     | —                        |

Таблица 5. Значения коэффициентов  $B_2$  и  $\gamma_2$  в формуле (31) в зависимости от размеров поперечного сечения

| $r$ , см <sup>-1</sup> | $B_2$ | $\gamma_2$ , 1/сут |
|------------------------|-------|--------------------|
| 0,2 и менее            | 0,57  | 0,01               |
| 0,3                    | 0,53  | 0,014              |
| 0,4                    | 0,49  | 0,021              |
| 0,5                    | 0,43  | 0,023              |

(31б) пригодна для описания процесса деформирования при расчетах, связанных с выявлением конечного (после окончания процесса ползучести) состояния конструкции. Кривая (31в) на начальном участке деформирования более полно описывает экспериментальные данные, чем кривая (31б). При использовании кривой (31а) влияние размеров поперечного сечения элемента может быть учтено путем изменения значений коэффициентов  $B_2$  и  $\gamma_2$ , как это показано в табл. 5.

В Рекомендациях [104] предложено использовать такие формулы:

$$f(t-\tau_1) = \begin{cases} 0,5 \left( \frac{t-\tau_1}{a_0} \right)^{0,5}, & t-\tau_1 \leq a_0; \\ \frac{t-\tau_1}{a_0 + (t-\tau_1)}, & t-\tau_1 > a_0, \end{cases} \quad (32)$$

а также формулу (31б).

Значение  $a_0$  учитывает влияние размера поперечного сечения и влажности окружающего воздуха:

$$a_0 = 0,3 B \xi_1 \xi_2, \quad (33)$$

причем  $\xi_1$  и  $\xi_2$  принимаются по табл. 6;  $B$  — см. обозначения к формуле (29);  $a_0$  — в сутках.

Таблица 6. Значения  $\xi_i$  в выражении (33)

| $r$ , см | 2,5  | 5   | 10   | 15  | 20  | 25 и более |
|----------|------|-----|------|-----|-----|------------|
| $\xi_1$  | 1    | 1,5 | 2,5  | 3,5 | 4,5 | 5,5        |
| W, %     | 40   | 50  | 60   | 70  | 80  | 90 и более |
| $\xi_2$  | 0,52 | 0,7 | 0,88 | 1   | 1   | 1          |

Кривые усадки бетона достаточно полно могут быть описаны зависимостью

$$\varepsilon_{yc}(t - \tau_w) = \varepsilon_{yc} [1 - B_3 e^{-s_1(t - \tau_w)} - B_4 e^{-s_2(t - \tau_w)}], \quad (34)$$

причем  $\varepsilon_{yc} = \varepsilon_{yc}(\infty)$ ;  $\tau_w$  — продолжительность хранения образцов бетона до момента начала отсчета усадки.

Для эталонного бетона  $\varepsilon_{yc}$  определяется согласно (28), а коэффициенты, входящие в (34), принимаются равными:

$$\begin{aligned} B_3 &= 0,25, & B_4 &= 0,55, & s_1 &= 0,001 \text{ 1/сут}, \\ s_2 &= 0,091/\text{сут}. \end{aligned} \quad (35)$$

## 5. ВЛИЯНИЕ ВОЗРАСТА К МОМЕНТУ ЗАГРУЖЕНИЯ НА ДЕФОРМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА БЕТОНА

Старение приводит к тому, что возраст к моменту загрузки оказывает влияние на прочность, упругомгновенные деформации и ползучесть бетона.

Анализ результатов 174 опытов [89] по изучению модуля упругомгновенных деформаций позволил построить эмпирическую линию регрессии, представляющую влияние старения на значение модуля упругомгновенных деформаций  $E(\tau)$  при  $\tau > 7$  сут. Значения  $E(\tau)/E(\infty)$  показаны в табл. 7 и на рис. 10. Аппроксимация этой линии с помощью известного выражения [7] привела к формуле

$$E(\tau) = E(\infty) [1 - 0,372e^{-0,0259\tau}] (\tau, \text{сут}). \quad (36)$$

Если не делать различия между модулем упругомгновенных деформаций и начальным модулем упругости, то на основе величин, рекомендуемых СНиП II-21-75 и (36), можно получить значения  $E(\infty)$  для тяжелого бетона различных марок, приведенные в табл. 8.

В силу явления старения для характеристики деформативных свойств бетона необходимо располагать не только кривыми ползучести, построенными при различных  $\sigma$ , но и кривыми, относящимися к различным  $\tau_1$ . В пределах области условно-линейной ползучести, где уровень напряжений не оказывает влияния на удельные деформации ползучести (19), простую ползучесть определяет семейство кривых, соответствующих различным  $\tau_1$ , т. е. поверхность, построенная в координатах,  $z = (t - \tau)$  и  $\tau$ .

Таблица 7. Значения  $K(z, \tau)$ ;  $\frac{E(\tau)}{E(\infty)}$ ;  $K(\infty, \tau) \frac{E(\tau)}{E(\infty)}$  для тяжелого бетона, вычисленные по среднестатистическим данным (время в сутках)

| $\tau$ | $K(z, \tau)$ |       |       |       |       |        |         |       | $\frac{E(\tau)}{E(\infty)}$ | $K(\infty, \tau) \frac{E(\tau)}{E(\infty)}$ |
|--------|--------------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|-----------------------------|---|
|        | $z$          |       |       |       |       |        |         |       |                             |   |
|        | 0-10         | 11-28 | 29-40 | 41-60 | 61-90 | 91-180 | 181-360 | 361-∞ |                             |   |
| 1      | 8,5          | 6,9   | 5,3   | 4,55  | 4     | 3,45   | 3       | 2,6   | 0,39                        | 0,82  |
| 2      | 4,6          | 3,5   | 3,2   | 2,8   | 2,55  | 2,25   | 2       | 1,8   | 0,47                        | 0,85  |
| 3      | 2,8          | 2,35  | 2,15  | 2     | 1,8   | 1,65   | 1,5     | 1,4   | 0,56                        | 0,88  |
| 5      | 1,95         | 1,8   | 1,75  | 1,6   | 1,5   | 1,45   | 1,35    | 1,3   | 0,68                        | 0,92  |
| 7      | 1,75         | 1,65  | 1,57  | 1,5   | 1,4   | 1,35   | 1,27    | 1,25  | 0,74                        | 0,95  |
| 10     | 1,55         | 1,5   | 1,65  | 1,4   | 1,3   | 1,25   | 1,22    | 1,2   | 0,78                        | 0,97  |
| 14     | 1,4          | 1,4   | 1,35  | 1,3   | 1,25  | 1,2    | 1,17    | 1,15  | 0,81                        | 0,97  |
| 20     | 1,2          | 1,2   | 1,2   | 1,15  | 1,15  | 1,15   | 1,12    | 1,09  | 0,84                        | 0,92  |
| 28     | 1            | 1     | 1     | 1     | 1     | 1      | 1       | 1     | 0,87                        | 0,87  |
| 40     | 0,83         | 0,83  | 0,83  | 0,83  | 0,83  | 0,83   | 0,845   | 0,86  | 0,89                        | 0,77  |
| 60     | 0,68         | 0,68  | 0,68  | 0,68  | 0,68  | 0,68   | 0,72    | 0,77  | 0,9                         | 0,69  |
| 90     | 0,6          | 0,6   | 0,6   | 0,6   | 0,6   | 0,6    | 0,65    | 0,7   | 0,9                         | 0,63  |
| 180    | 0,5          | 0,5   | 0,5   | 0,5   | 0,5   | 0,5    | 0,55    | 0,61  | 0,92                        | 0,56  |
| 360    | 0,45         | 0,45  | 0,45  | 0,45  | 0,45  | 0,45   | 0,5     | 0,55  | 0,94                        | 0,52  |
| ∞      | —            | —     | —     | —     | —     | —      | —       | —     | 1                           | —   |

Выражение для меры ползучести  $C(z, \tau)$  тяжелого бетона можно представить в формуле

$$C(z, \tau) = C(\infty, 28) f(z, 28) K(z, \tau) = C(z, 28) K(z, \tau), \quad (37)$$

где  $C(\infty, 28)$  и  $f(z, 28)$  принимаются согласно (27) и (31).  
Значения функции

$$K(z, \tau) = \frac{C(z, \tau)}{C(z, 28)} \quad (38)$$

при различных  $z$  и  $\tau$ , полученные путем статистической обработки результатов 141 опыта, записаны в табл. 7 ( $\sigma = 0,4 R_{пр}$ ). В последнем столбце таблицы показаны относительные значения предельной характеристики ползучести, рав-

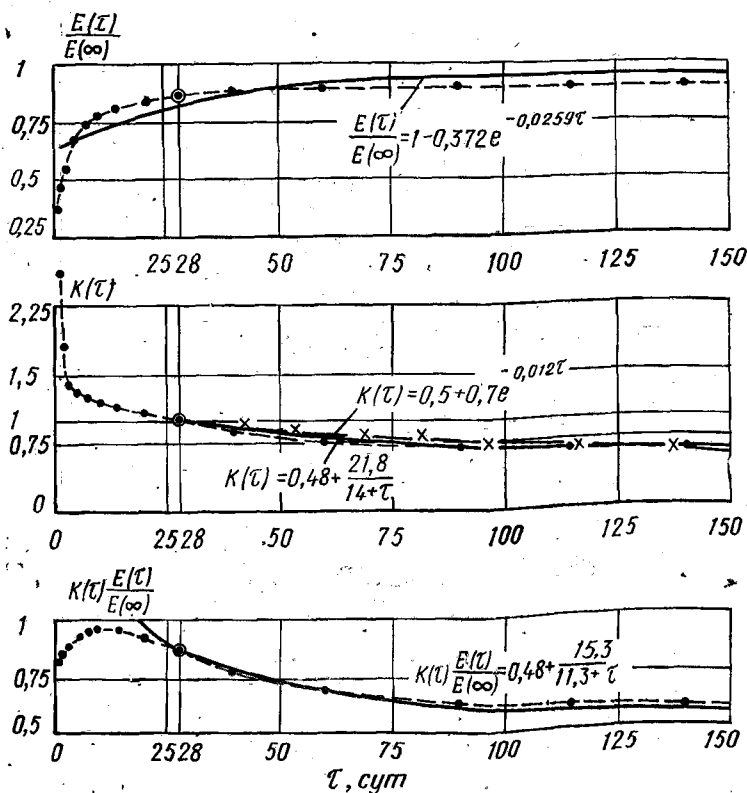


Рис. 10. Эмпирические линии регрессий  $E(\tau)$ ,  $K(\tau)$  и  $K(\tau) E(\tau)/E(\infty)$  и их аппроксимации.

Таблица 8. Значения модулей упругости тяжелого бетона естественного твердения  
 $E \cdot 10^{-2}$ , МПа

| Наименование  | Проектная марка бетона |       |       |       |       |       |       |       |
|---|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   | М 300                  | М 350 | М 400 | М 450 | М 500 | М 600 | М 700 | М 800 |
| Модуль упругомгновенных деформаций при $\tau = 7$ сут, $E = E(7)$       | 226                    | 242   | 257   | 272   | 280   | 296   | 305   | 312   |
| Начальный модуль по СНиП, $E = E(28)$                                   | 290                    | 310   | 330   | 345   | 360   | 380   | 390   | 400   |
| Предельное значение модуля упругомгновенных деформаций, $E = E(\infty)$ | 354                    | 378   | 402   | —     | —     | —     | —     | —     |

ные  $\varphi(\tau)/C(\infty, 28) E(\infty) = K(\infty, 28) E(\tau)/E(\infty)$ . Эта функция, как и  $K(z, \tau)$ , характеризует влияние старения на значения длительных деформаций.

Анализ данных табл. 7 показывает наличие трех зон деформирования, связанных со степенью старения (твердения, вызревания) бетона и отличающихся особенностями начертания соответствующих функций. В связи с этим удобно ввести классификацию бетона по степени вызревания, а именно:

1) интенсивно стареющий бетон:  $0 < \tau < 28$  сут;  $E = E(\tau)$ ;  $K = K(z, \tau)$  — начертания кривых ползучести зависят от возраста бетона в момент загрузки  $\tau$ ;  $\varphi = \varphi(\tau)$  и обладает максимумом при  $\tau > 0$ ;

2) стареющий бетон:  $28 \leq \tau < 360$  сут;  $E \approx \text{const}$ ,  $K \approx K(\tau)$ , т. е. начертания кривых ползучести незначительно зависят от  $\tau$ ;  $\varphi = \varphi(\tau)$  и монотонно уменьшается при увеличении  $\tau$ ;

3) старый бетон:  $\tau \geq 360$  сут;  $E = \text{const}$ ;  $K \approx \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ .

Выражение меры ползучести с учетом влияния факторов, перечисленных в табл. 2, должно записаться в виде:

для интенсивно стареющего бетона

$$C(z, \tau) = C(\infty, 28) K(z, \tau) f(z, 28); \quad (39)$$

для стареющего бетона

$$C(z, \tau) = C(\infty, 28) K(\tau) f(z, 28); \quad (40)$$

для старого бетона

$$C(z, \tau) = C(z) = C(\infty, 28) K f(t-28). \quad (41)$$

Формулы (39) — (41) и (31) отчетливо показывают особенности кривых простой ползучести при различных степенях старения бетона. Так, из формулы (39) следует, что для детального описания кривых на начальном участке деформирования при  $\tau < 28$  сут необходимо использовать функции, учитывающие влияние  $\tau$  на форму кривых ползучести, в частности функции типа применяемых С. В. Александровским [2]. Зависимость (40) подтверждает возможность применения при  $\tau_1 \geq 28$  сут формул, предложенных Н. Х. Арутюняном [7]. Кроме того, формулы (39) — (41), (27), (31) и табл. 2, 4, 5, 7 позволяют вычислить для тяжелого бетона средние дискретные значения  $C(t_K, \tau_1)$  с учетом влияния всех основных факторов.

Однако для построения решений задач теории ползучести необходимо представление  $C(t, \tau)$  в виде функций, ап-

проксимирующих статистические или экспериментальные данные и, в частности, удовлетворяющие условиям, соответствующим (8).

Анализ этого вопроса показывает, что его оптимальное решение может быть построено на основе классификации бетона по степеням твердения и принятия для каждого класса отдельных функций. Желательно также, чтобы эти функции, помимо детального описания кривых простой ползучести, были по возможности более просты и допускали построение решений теории ползучести в аналитической форме.

В табл. 9 записаны функции, рекомендуемые для аппроксимации  $C(t, \tau)$  в зависимости от степени вызревания бетона, а также перечислены основные типы задач, решаемых на основе каждой из этих функций.

Значения постоянных, входящих в формулы, аппроксимирующие  $C(t, \tau)$  для интенсивно стареющего и стареющего бетона, должны подбираться так, чтобы удовлетворялось условие

$$\frac{\partial C(t, \tau_1)}{\partial t} \leq \frac{\partial C(t, \tau_2)}{\partial t},$$

связывающее скорости развития деформаций ползучести и старения. В противном случае полученные формулы могут показывать наличие ползучести после полного снятия нагрузки [85].

В связи с тем, что не учитывается влияние  $\tau$  на форму кривых ползучести для интенсивно стареющего бетона и не выполняются записанные выше условия, Рекомендации [41] достаточно правильно описывают кривые ползучести только при: а)  $\tau_1 \geq 20$  сут; б)  $\bar{r} > 0,1 \text{ см}^{-1}$ ,  $\bar{r} = 0,05 \text{ см}^{-1}$  в случае  $\tau_1 \geq 56$  сут [89, 145].

Классификация, принятая при построении табл. 9, основана на возрасте бетона к моменту приложения воздействий. Если воздействия приложены, например, к интенсивно стареющему бетону, то решение, построенное на основе соответствующей аппроксимации, должно применяться на всем рассматриваемом промежутке времени. В случаях приложения воздействия к стареющему бетону рационально использовать соответствующие более простые аппроксимации и т. д.

На рис. 11 представлены ломаные линии, полученные согласно (39) с учетом  $C_3(\infty, 28) = 6,36 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}$ , данных табл. 7 и ординат кривой (31а), а также соответ-



88 Таблица 9. Классификация бетона по степени вызревания (возрасту)

| Степень вызревания   | Возраст бетона, сут    | Основные особенности деформирования                               | Зависимости, рекомендуемые для аппроксимации кривых мер ползучести и модуля упругогмновенных деформаций  | Номера формул                        | Воздействия, характерные для бетона данного возраста  |
|----------------------|------------------------|---|--|--------------------------------------|---|
| Интенсивно стареющий | $\tau_1 < 28$          | $C(t, \tau) \neq C(t-\tau)$<br>$E(\tau) \neq \text{const}$        | $C(t, \tau) = \theta(\tau) - \psi(t) \frac{e^{\gamma t} - B}{e^{\gamma t} - B} - \Delta(\tau)\lambda(t-\tau); [2]$ $\theta(\tau) = \psi(\tau) + \Delta(\tau), \lambda(0) = 1, \lambda(\infty) = 0;$ $E(\tau) = E_0(1 - \beta_1 e^{-\alpha_1 \tau} - \beta_2 e^{-\alpha_2 \tau});$ $0 < \beta_1 \leq 1, 0 \leq \beta_2 \leq 1, \beta_1 + \beta_2 \leq 1$  | (42)<br>(43)                         | Воздействия технологического порядка, при которых начало формирования напряжений совпадает с началом твердения бетона   |
| Стареющий            | $28 \leq \tau_1 < 360$ | $C(t, \tau) \neq C(t-\tau)$<br>$E(\tau) \approx E = \text{const}$ | $C(t, \tau) = \theta(\tau) f(t-\tau); [7]$ $C(t, \tau) = \theta(\tau) [1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - B_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}];$ $0 < B_1 \leq 1, 0 \leq B_2 < 1, B_1 + B_2 \leq 1;$ $\theta(\tau) = C_0 + A e^{-\gamma \tau}, \theta(\tau) = C_0 + \frac{A}{\varepsilon + \tau};$ $C(t, \tau) = \theta(\tau) [1 - B e^{-\gamma_1(t-\tau)}];$ $0 < B \leq 1;$ $E(\tau) = E(\tau_1) = \text{const}; E(\tau) = E_0 \times (1 - \beta_1 e^{-\alpha \tau})$ | (44)<br>(45)<br>(46)<br>(47)<br>(48) | Воздействия, прикладываемые к достаточно затвердевшему бетону [ $R \approx R(28)$ ] в процессе строительства (включая передачу предварительного обжатия), вес конструкций, эксплуатационные воздействия |
| Старый               | $\tau_1 \geq 360$      | $E(\tau) = E = \text{const}$<br>$C(t, \tau) = C(t-\tau)$          | $C(t-\tau) = C_0 [1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - B_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}];$ $0 < B_1 \leq 1, 0 \leq B_2 < 1, B_1 + B_2 \leq 1$  | (49)                                 | Воздействия, проявляющиеся только в эксплуатационном периоде, годовые колебания температуры, изменения напряженно-деформированного состояния, связанные с догрузками и усилением конструкций            |

Примечания: 1. Классификация составлена применительно к бетону естественного твердения; при интенсификации твердения границы между степенями вызревания устанавливаются на основании особенностей деформирования, указанных в столбце 3.

2. Выражения для меры ползучести  $C(t, \tau)$  должны удовлетворять условию  $\frac{\partial C(t, \tau_1)}{\partial t} < \frac{\partial C(t, \tau_2)}{\partial t}$ ,

вующая аппроксимация с помощью (42) при таких вспомогательных функциях и коэффициентах:

$$\left. \begin{aligned} \theta(\tau) &= (3,05 + 1,94e^{-0,005\tau} + 3,9e^{-0,033\tau}) 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \\ \Delta(\tau) &= (0,24 + 0,25e^{-0,0065\tau} + 1,03e^{-0,061\tau}) 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \\ \lambda(t-\tau) &\approx e^{-5(t-\tau)}, \quad \gamma = 0,0018 \text{ 1/сут}, \quad B = 0,58. \end{aligned} \right\} (50)$$

Очевидно, что кривая на рис. 11 при  $\tau_1 = 28$  сут соответствует эталонному бетону.

На рис. 12 и 13 изображены кривые  $R(\tau)$ ,  $E(\tau)$  и  $C(t, \tau)$ , построенные на основании экспериментальных данных для гидротехнического бетона в стадии его термообработки, т. е. в условиях интенсивного твердения (сжимающие напряжения  $\sigma \approx 0,2 R_{\text{пр}}$ ) [118].

Аппроксимация меры ползучести выполнена по формуле (42) при

$$\left. \begin{aligned} \theta(\tau) &= [2 + 9,96e^{-0,03215\tau} + 45,8e^{-0,189\tau} + \\ &\quad + 0,338 \cdot 10^{10} \cdot e^{-2,115\tau}] 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \\ \Delta(\tau) &= [0,2 + 15,65e^{-0,0345\tau} + 258e^{-0,336\tau} + \\ &\quad + 0,243 \cdot 10^9 \cdot e^{-2,02\tau}] 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \\ \lambda(t-\tau) &= 0,23e^{-0,3124(t-\tau)} + 0,77e^{-1,385(t-\tau)}, \\ &\quad B = 0,8, \quad \gamma = 0,02 \text{ 1/сут}. \end{aligned} \right\} (51)$$

На рис. 10 показана эмпирическая кривая регрессии  $K(\tau)$  при  $\tau \geq 28$  сут, построенная по данным, приведенным в графе 9 табл. 7, а также ее аппроксимации на основе формул (46) [102]

$$K(\tau) = 0,48 + \frac{21,8}{14 + \tau}; \quad K(\tau) = 0,50 + 0,70e^{-0,012\tau}, \quad (52)$$

причем очевидно, что [см. (44)]

$$\theta(\tau) = C(\infty, 28) K(\tau). \quad (53)$$

Детальный анализ имеющегося экспериментального материала не позволил выявить каких-либо значимых факторов, влияющих на форму кривой  $K(\tau)$ , кроме скорости твердения цемента. Поэтому для тяжелых бетонов, выполненных с применением цементов, твердеющих с нормальной скоростью в обычных температурно-влажностных условиях, могут использоваться формулы (52). Из условия удовлетворения неравенства, записанного в примечании 2 к табл. 9, зависимости (31б) и (31в) могут применяться только совместно со второй из формул (52).

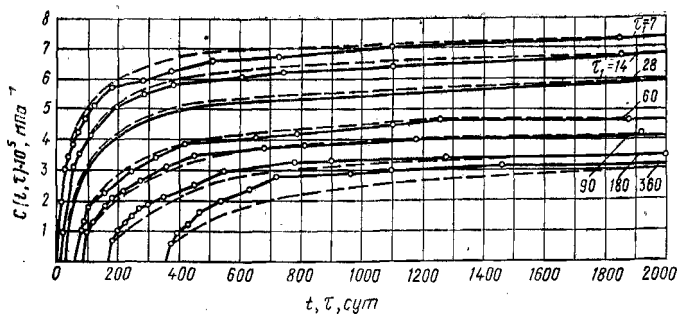


Рис. 11. Семейство кривых ползучести, включающее кривую для эталонного бетона

— — по среднестатистическим данным; — — по формуле (42)

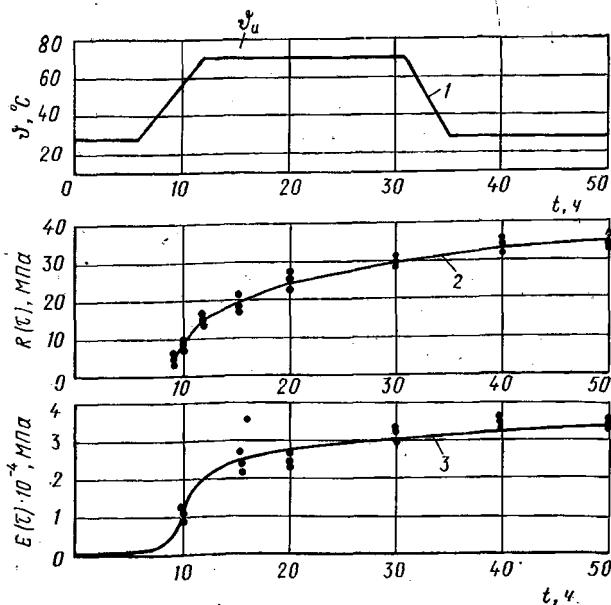


Рис. 12. Кривые  $R(\tau)$  и  $E(\tau)$  гидротехнического бетона в процессе термообработки

1 — изменение температуры воздуха в камере; 2 — средние значения прочности; 3 —  $E(\tau) = 3,6 [1 - 0,405e^{-0,03\tau} - 9,78e^{-0,339\tau}] \cdot 10^4$  МПа,  $\tau \geq 10$  ч

● опытные значения

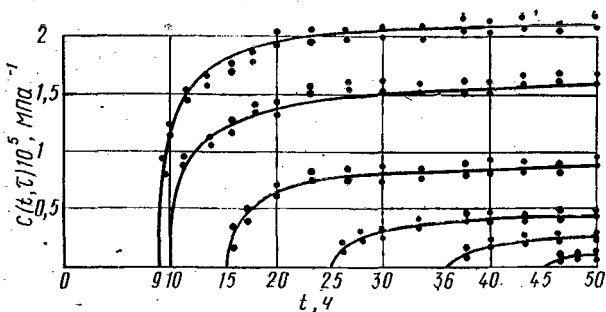


Рис. 13. Кривые меры ползучести  $C(t, \tau)$  гидротехнического бетона в процессе термообработки  $\phi=70^\circ\text{C}$  (см. рис. 12)

Поскольку для стареющего бетона характерно примерно постоянное значение модуля упругомгновенных деформаций, то при выполнении практических расчетов в большинстве случаев при  $\tau_1 \geq 28$  сут принимается  $E(\tau) = E(\tau_1) = E = \text{const}$ . Для получения более точных результатов, особенно если речь идет о напряженном состоянии, связанном с вынужденными деформациями, может быть использована вторая формула (48), при этом для получения решений задач теории ползучести в замкнутой форме удобно записывать  $C(t, \tau)$  в виде выражения

$$C(t, \tau) = \frac{\varphi(\tau)}{E(\tau)} [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}], \quad (54)$$

следующего из (20) и (47), при  $B = 1$ .

Учитывая, что для стареющего бетона функция  $\varphi(\tau)$  монотонно затухает и стремится к постоянному значению (см. рис. 10)\*, для ее аппроксимации удобно применить выражение [85]

$$\varphi(\tau) = B_0 + \frac{B_1}{\gamma + \tau}, \quad \varphi(\infty) = B_0. \quad (55)$$

В линейной теории учет быстропротекающей ползучести может быть выполнен путем подбора в формулах (45) или (47) значений коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$  или  $B$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$B_1 + B_2 < 1; \quad B < 1. \quad (56)$$

\* Поскольку  $\varphi(\tau)$  пропорциональна  $K(\tau) E(\tau)/E(\infty)$ .

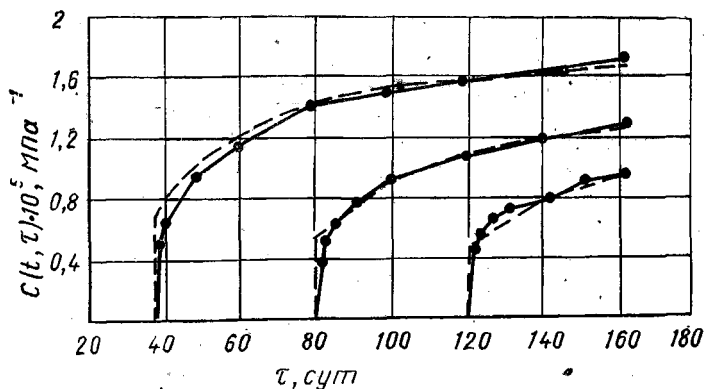


Рис. 14. Пример аппроксимации меры ползучести бетона при сжатии с помощью (47) при  $B < 1$

— — — опытные кривые; - - - - - теоретические кривые

Если используется аппроксимация (47) при  $B = 1$ , то полная относительная деформация (22) записывается так:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \theta(\tau) [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}]. \quad (57)$$

В случае  $B < 1$ , введя приведенные характеристики деформативности

$$\bar{E}(\tau) = \bar{\nu}(\tau) \bar{E}(\tau); \quad \bar{\nu}(\tau) = \frac{1}{1 + E(\tau)\theta(\tau)(1-B)}; \quad (58)$$

$$\bar{\theta}(\tau) = B\theta(\tau),$$

удобно представить  $\delta(t, \tau)$  в форме, аналогичной (57),

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{\bar{E}(\tau)} + \bar{\theta}(\tau) [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}]. \quad (59)$$

Для иллюстрации возможностей выражения (59) при описании кривых простой ползучести на конечных периодах времени на рис. 14 показано семейство экспериментальных кривых и соответствующее аналитическое описание. Эти кривые получены в результате испытания образцов-близнецов размером  $7 \times 7 \times 70$  см, изготовленных из бетона состава 1:1,31:3,86 по массе, изолированных от влагопотерь и нагруженных нагрузкой, соответствующей  $0,3 \sigma/R_{пр}$  [99, 127]. При описании  $\theta(\tau)$  использовалась первая фор-

мула (46) и применялись также значения постоянных коэффициентов:

$$C_0 = 1,078 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}; \quad A = 1,582 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1};$$

$$\gamma = 0,025 \text{ 1/сут}; \quad \gamma_1 = 0,03 \text{ 1/сут}; \quad B = 0,6;$$

$$E(28) = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

## 6. ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ

Для построения феноменологической теории весьма существенна возможность описания деформаций ползучести при переменных напряжениях на основе кривых простой ползучести. Удобно начать с простейшего переменного режима: постоянная нагрузка приложена в момент времени  $t_1$  и снята при  $t_2$  (рис. 15). При таком режиме в промежутке времени  $t_1 < t < t_2$  развивается простая ползучесть, характеризующаяся мерой  $C(t, t_1)$  и полной относительной

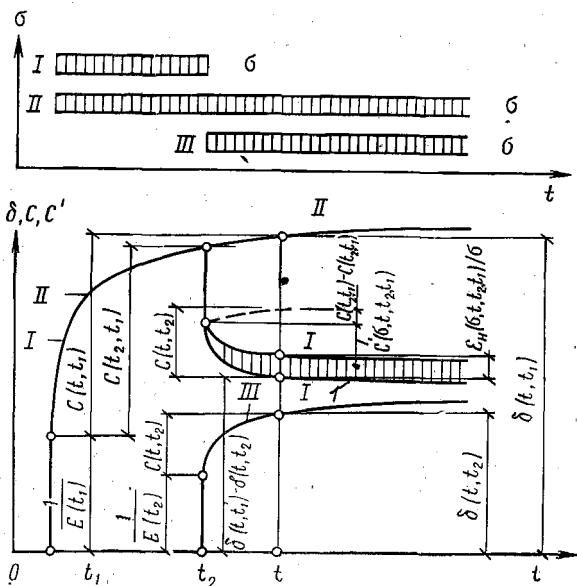


Рис. 15. Упругое последствие и выделение необратимых деформаций первого рода

— — экспериментальные кривые полных деформаций при режимах за-  
 грузки I, II и III; I — кривая, построенная по принципу наложения; зона  
 деформаций  $\epsilon_H$  заштрихована

деформацией  $\delta(t, t_1)$ . При  $t \geq t_2$  происходит упругое и длительное восстановление размеров образца; последнее называется упругим последствием и может быть условно охарактеризовано удельной деформацией  $C(\sigma, t, t_1, t_2)$ , относимой к значениям ранее действовавших напряжений  $\sigma$ . Деформации упругого последствия часто трактуются как деформации, обратные деформациям ползучести. При наличии упругого последствия считают, что деформации ползучести обладают обратимостью. Под степенью обратимости понимают отношение деформаций упругого последствия к значению ползучести, сформировавшейся к моменту разгрузки.

В бетоне явление упругого последствия связано со стремлением упругих зерен крупного заполнителя после разгрузки к восстановлению первоначальных размеров и форм, что приводит к растяжению, упругим деформациям и ползучести отвердевшего цементного раствора («микробетона»), а также микроразрушениям.

Поскольку в промежутке времени  $t_1 - t_2$  увеличивается прочность и уменьшается деформативность, то следует считать, что основной причиной неполной обратимости деформаций ползучести бетона является старение. С учетом этого выражение для определения полной деформации, сохранившейся в теле бетона к моменту  $t > t_2$ , в условно-линейной области ползучести можно записать в виде (см. рис. 15):

$$\varepsilon^*(\sigma, t, t_1, t_2) = \sigma \delta(t, t_1) - \sigma \delta(t, t_2) + \varepsilon_H(\sigma, t, t_1, t_2). \quad (60)$$

Первые два слагаемых построены в предположении формирования необратимых деформаций только вследствие старения и основаны на наложении полных деформаций (в данном случае — вычитании), вызванных сжимающими напряжениями, приложенными в момент времени  $t_1$  и  $t_2$ , т.е. на принципе наложения. Третье слагаемое  $\varepsilon_H(\sigma, t, t_1, t_2)$  — необратимые деформации первого рода [29, 139], зависящие от истории предварительного действия нагрузки и представляющие ошибку, связанную с применением принципа наложения. Значение удельной относительной деформации первого рода вычисляется по данным испытаний бетонных образцов-близнецов по режимам I, II, III, показанным на рис. 15, причем

$$\varepsilon_H(\sigma, t, t_1, t_2) / \sigma = C'(t, t_2) - C(t, t_1) + C(t_2, t_1) - C'(\sigma, t, t_1, t_2). \quad (61)$$

Равенства  $\varepsilon_H = 0$  и  $C'(\sigma, t, t_1, t_2) = C(t, t_2) - C(t, t_1) + C(t_2, t_1)$  свидетельствуют о полном выполне

нии принципа наложения или, что то же самое, о наличии линейности, т. е. возможности суммирования деформаций ползучести, вызванных постоянными напряжениями, приложенными в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Выполнение принципа наложения для деформаций ползучести может быть охарактеризовано отношением  $[C'(\sigma, t, t_1, t_2) + C(t, t_1) - C(t_2, t_1)]/C(t, t_2)$ . В табл. 10 приведены значения таких отношений, полученные в результате исследования деформаций бетонных образцов-близнецов  $8 \times 8 \times 80$  см, имевших гидроизолированные поверхности. Дополнительные данные об условиях опытов приведены в табл. 11.

Как видно из этих данных, экспериментальные значения  $C'$  в среднем на 30% меньше значений  $C'$ , полученных на основании принципа наложения. В силу обратимости упругих деформаций принцип наложения для полных деформаций приведет к значительно меньшим погрешностям. Например, для бетона первой группы [32], считая для момента разгрузки  $R_{пр}(126) = 40$  МПа, можно принять  $E(126) \approx 3,3 \cdot 10^4$  МПа,  $1/E(126) = 1/3,3 \cdot 10^4$  (МПа) $^{-1} = 30,3 \cdot 10^6$  (МПа) $^{-1}$ . При  $t - \tau_1 = 5$  мес отношение полных деформаций составит  $13,14 + 30,3/18,77 + 30,4$  и приведет к отклонению в 11,5%.

Таблица 10. Значения деформаций обратной ползучести и деформации ползучести бетона при сжатии по результатам опытов [32]

| Серия | Группа | Значения деформаций $[C'(\sigma, t, t_1, t_2) + C(t, t_1) - C(t_2, t_1)] \sigma$ в числителе, $C(t, t_2) \sigma$ — в знаменателе (увел. в $10^7$ раз) |              |                      |              |                       |              |
|-------|--------|---|--------------|----------------------|--------------|-----------------------|--------------|
|       |        | через 2 мес   | % отклонения | через 2,5 мес        | % отклонения | через 5 мес           | % отклонения |
| I     | —      | $\frac{11,24}{17,1}$  | 34           | —                    | —            | $\frac{13,14}{18,77}$ | 30           |
| II    | 1п     | $\frac{16,55}{21,2}$  | 22           | —                    | —            | —                     | —            |
|       | 2п     | $\frac{18,45}{27,7}$  | 33           | —                    | —            | —                     | —            |
| III   | 1п     | $\frac{9}{12}$  | 25           | $\frac{10,45}{13,7}$ | 24           | —                     | —            |
|       | 2п     | $\frac{9,45}{13,5}$   | 30           | $\frac{10,45}{15,6}$ | 33           | —                     | —            |



Таблица 11. Основные данные об опытах, описанных в статье [32]

| Серия | Возраст бетона, сут, в момент |                 | $t_2 - t_1$ , сут | Постоянное напряжение, $\sigma$ , МПа | Прочность $R_{пр}$ , МПа, в момент $t_1$ | $\frac{\sigma}{R_{пр}}$ | Уровень разгрузки, % (ориентировочно) |
|-------|-------------------------------|-----------------|-------------------|---------------------------------------|--|-------------------------|---------------------------------------|
|       | загрузки $t_1$                | разгрузки $t_2$ |                   |                                       |  |                         |                                       |
| I     | 46                            | 126             | 80                | 18—20                                 | 36                                       | 0,5—0,55                | 30, 40, 75, 100                       |
| II    | 22                            | 57              | 35                | 9                                     | 23,1                                     | 0,4                     | 15, 20, 50, 100                       |
| III   | 29                            | 104             | 75                | 8—9,6                                 | 32                                       | 0,25—0,3                | 10, 20, 30, 50, 100                   |

Поскольку известно [137], что деформации упругого последствия в условно-линейной области практически линейно связаны с напряжениями, действовавшими до разгрузки, линейная составляющая удельных деформаций ползучести может быть принята равной [34]:

$$C_{д}(t, t_2) = C(t, t_2) - \varepsilon_{н}(\sigma, t, t_1, t_2) / \sigma. \quad (62)$$

Результаты опытов, выполняемых по схеме, показанной на рис. 15, применительно к бетону различного возраста при загрузках и разгрузках позволяют получить семейства кривых  $\varepsilon_{н}$  и  $C_{д}$ . На рис. 16 показаны кривые  $\varepsilon_{н}/\sigma$  и  $C_{д}$ , построенные по данным опытов, проведенных на об-

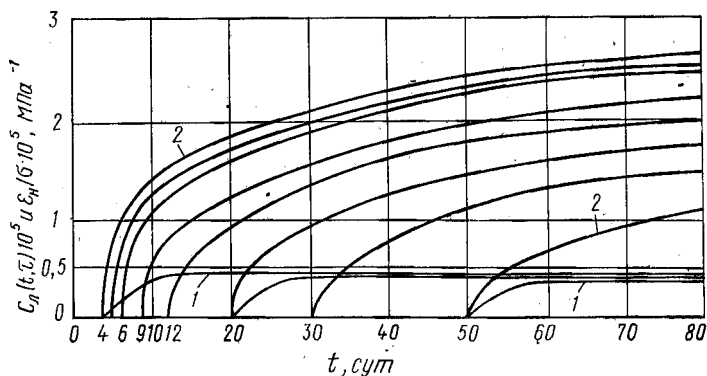


Рис. 16. Кривые, характеризующие составляющие относительных деформаций ползучести бетона  
1 — необратимые деформации первого рода  $\varepsilon_{н}/\sigma$ ; 2 — линейная составляющая  $C_{д}$

разцах из тяжелого бетона  $R(28) = 32$  МПа [34]. В этих опытах сжимающие напряжения принимались  $0,2 R_{пр}$  и  $0,4 R_{пр}$ ; различие в уровне напряжений мало повлияло на отношение  $\varepsilon_n/\sigma$ . На рисунке отчетливо видно, что деформации  $\varepsilon_n$  практически полностью проявляются на протяжении примерно 20 дней после загрузки и относительно мало зависят от возраста бетона в момент загрузки  $\tau_1$ ; около 50% полных  $\varepsilon_n$  относится к первым двум суткам. Линейная составляющая  $C_{л}$  развивается в течение значительно большего периода времени, и ее значение существенно связано с  $\tau_1$ . Удельный вес  $\varepsilon_n$  при относительно небольших  $\tau_1$  сравнительно невелик. Например, при  $\tau_1 = 20$  сут и продолжительности действия нагрузки  $t - \tau_1 = 60$  сут:  $\varepsilon_n(80,20)\sigma^{-1} = 4 \cdot 10^{-6}$ ,  $C_{л}(80,20) 18 \cdot 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_n/\sigma C = 4/(4+18) \approx 0,18$ . Если же принять  $t - \tau_1 = \infty$ , то  $C_{л}$  увеличится примерно вдвое, а  $\varepsilon_n$  практически не изменится,  $\varepsilon_n/\sigma C = 0,09$ . С увеличением  $\tau_1$  удельный вес  $\varepsilon_n$  возрастает; относительно больше уменьшается  $C_{л}$ , поэтому наибольшие отклонения от принципа наложения для деформации ползучести возможны при длительном деформировании старого бетона.

Необходимо иметь в виду, что рассмотренный режим — длительная постоянная нагрузка с последующей мгновенной разгрузкой — с точки зрения применения принципа наложения является неблагоприятным. Более благоприятны режимы, при которых нагрузки и разгрузки происходят постепенно. Для иллюстрации на рис. 17 представлены ре-

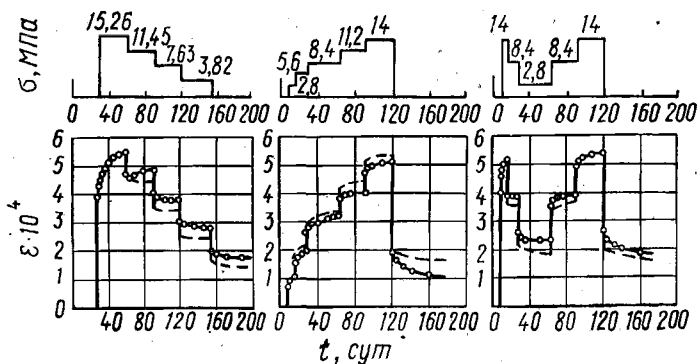


Рис. 17. Проверка применимости принципа наложения при ступенчатых нагрузках и разгрузках

— — экспериментальные кривые полных деформаций; — — — кривые, построенные по принципу наложения

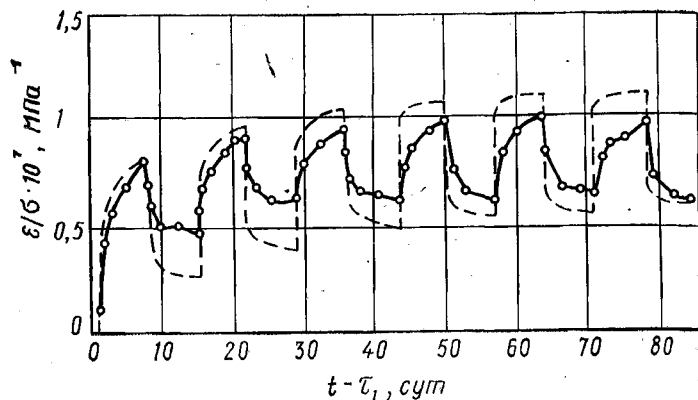


Рис. 18. Проверка применимости принципа наложения при нескольких циклах нагрузка-разгрузка

— экспериментальные кривые полных деформаций; ---- кривые, построенные по принципу наложения

результаты опытов А. А. Росса, относящиеся к ступенчато изменяющимся нагрузкам [2].

С другой стороны, принцип наложения приводит к существенным погрешностям при нескольких циклах нагрузка-разгрузка. Из характера кривых на рис. 18 видно [127], что это связано с развитием, главным образом на первом цикле действия нагрузки, деформаций типа пластических, т. е. необратимых деформаций первого рода.

Данные, приведенные в этом параграфе о степени необратимости деформаций ползучести, относятся к случаям невысоких сжимающих напряжений (см. табл. 11). При более высоких напряжениях, в силу существенного развития деструктивных процессов в бетоне, удельный вес необратимых деформаций первого рода возрастает.

## 7. ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

При растяжении ползучесть бетона прямо пропорциональна напряжениям, практически до предела длительного сопротивления. Имеются данные, показывающие, что удельная характеристика деформаций последействия при растяжении  $C'_p(\sigma, t, t_1, t_2)$  меньше меры ползучести  $C_p(t, t_2)$  примерно на 35% [4].

Наиболее сложен вопрос об отношениях мер ползучести бетона при сжатии и растяжении. Опыты, описанные в [4], показали, что при численно равных или близких по абсолютным значениям напряжениях различных знаков после месячного пребывания под нагрузкой простая ползучесть бетона при растяжении на 15—70% больше, чем при сжатии. При сжимающих напряжениях порядка  $0,4 R_{пр}$  и растягивающих  $0,7 R_{пр}$  мера ползучести при сжатии была равна или несколько превышала меру ползучести при растяжении. При более высоких сжимающих напряжениях наблюдается еще большее относительное увеличение ползучести при сжатии [6]. Зависимость отношения  $C_p/C$  от уровня напряжений объясняется наличием нелинейной составляющей ползучести при сжатии и почти полным ее отсутствием при растяжении [4].

С. В. Александровский рекомендует в расчетах конструкций, работающих при низких сжимающих напряжениях, а также при сжимающих напряжениях порядка  $\sigma > 0,5 R_{пр}$ , на длительные воздействия нагрузок учитывать различие в мерах ползучести при сжатии и растяжении [4,6]. При напряжениях сжатия эксплуатационного уровня, т. е. в области условно-линейной ползучести, считается возможным принять допущение о равенстве мер ползучести и определять такую общую меру при действии сжимающих напряжений порядка  $0,4—0,5 R_{пр}$ . Естественно, что учет неоднородности бетонного тела, связанной со знаком напряжений, существенно усложняет расчет напряженно-деформированного состояния. В феноменологической теории ползучести бетона, как правило, принимается допущение о равенстве  $C$  и  $C_p$ .

В опытах К. С. Карапетяна и Р. А. Котикяна выявлено, что отношение между мерами ползучести  $C_p/C$  связано с размерами поперечных сечений образцов [51]. Для неизолированных бетонных образцов-близнецов, загружавшихся при  $\tau_1 = 28$  сут сжимающими напряжениями, соответствующими  $\eta = 0,1$ , или растягивающими, соответствующими  $\eta_p = 0,4$ , опытные данные аппроксимированы с помощью зависимости

$$C_p(t, 28, a) = 2,21C(t, 28, a) (1 - e^{-0,071a}), \quad (63)$$

где  $a$  — размер стороны поперечного (квадратного) сечения образца, см.

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ БЕТОНА

Значения коэффициентов поперечных упругомгновенных деформаций бетона  $\nu_1(\tau)$  и поперечных деформаций ползучести  $\nu_2(t, \tau)$ , а также особенности влияния различных факторов на эти коэффициенты имеют весьма существенное значение. Во-первых, как упоминалось в п. 1, зависимость между уровнем сжимающих напряжений и значением дифференциального коэффициента  $\Delta\nu$  поперечных деформаций может рассматриваться как характеристика деструктивных процессов, происходящих в бетоне (см. рис. 1). Во-вторых, использование приближенного равенства [7]

$$\nu_1(\tau) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const} \quad (64)$$

приводит к весьма существенному упрощению решений задач в условнолинейной области ползучести (см. п. 1 гл. IV), связанных с двух- и трехмерным напряженным состоянием.

В опытах [14] при рассмотрении неизолированных бетонных образцов в широком диапазоне уровней сжимающих напряжений (до  $\sigma = 0,9 R_{\text{пр}}$ ) сразу же после загрузок наблюдались увеличения  $\nu_2(t, \tau)$ , затем снижения до значения, близкого к  $\nu_1(\tau)$ . Примерно аналогичные результаты получены и в опытах [6]. На основании данных этих опытов сделан вывод о том, что  $\nu_2(t, \tau)$  несколько меньше  $\nu_1(\tau)$ . Сказанное свидетельствует о приемлемости использования приближенных равенств (64) (см. п. 1 гл. IV) хотя бы в границах условно-линейной области ползучести.

## 9. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Во многих случаях бетон работает в условиях сложного напряженного состояния. К настоящему времени имеются экспериментальные данные, в основном относящиеся к ползучести бетонных дисков при двухосном сжатии в условнолинейной области (краткий обзор см. [101]). Полученные данные показывают, что обжатие в направлении  $y$  уменьшает деформации ползучести в направлении  $x$ . В различных опытах это уменьшение колеблется в пределах 0,3—1.

Внесены различные, взаимно неувязанные, предложения по описанию зависимостей между мерами ползучести бетона при двух- и трехмерном напряженном состоянии  $S_{2x}$  и  $S_{3x}$ , с одной стороны, и простом сжатии  $S_x$ ,

с другой. Отношения  $k_{2x} = C_{2x}/C_x$  и  $k_{3x} = C_{3x}/C_x$  связываются с действующими нормальными напряжениями [59, 67, 82, 140] и коэффициентом поперечных деформаций ползучести [82, 140].

Статистическая обработка имеющихся экспериментальных данных [101] свидетельствует о зависимости значения  $k_{2x}$  от толщины диска  $h$  и приводит к формуле

$$k_{2x}(h) = -0,0054h^2 + 0,1344h + 0,258, \quad (65)$$

где  $2 \text{ см} \leq h \leq 10 \text{ см}$ .

Логично предположить, что наличие зависимости (65) связано с изменением влажности геля цементного камня вследствие механического воздействия длительно приложенной нагрузки, т. е. с так называемой «напряженной усадкой» (см. п. 1. гл. I). Влияние изменения влажности на деформации ползучести проявляется наиболее сильно в тонких дисках: при  $h \rightarrow 10 \text{ см}$   $k_{2x} \rightarrow 1$ . Поскольку количество влаги, теряемое образцом в каждом конкретном случае при данном уровне напряжений и определяющее величину «напряженной усадки», по-видимому, более или менее стабильно, относительное уменьшение линейных деформаций ползучести тонких дисков при двухосном сжатии естественно. Эта гипотеза подтверждается тем, что в изолированных образцах отношение мер ползучести двухосно- и одноосно-сжатых дисков близко к единице в [22] и 0,8 в [142].

Имеются основания полагать, что на значение  $k_{2x}$  оказывает заметное влияние и уровень напряжений. Последнее, а также некоторые другие данные показывают, что значение  $k_{2x}$  зависит от целого ряда факторов. Поэтому математическая модель  $k_{2x}$  должна учитывать влияние не одного, а нескольких факторов.

## ГЛАВА II

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ДРЕВЕСИНЫ ПРИ ДЛИТЕЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 1. СТРОЕНИЕ И ХАРАКТЕР ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДРЕВЕСИНЫ. ДЛИТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Идеализированная схема строения древесины включает волокнистый скелет, обладающий упругими и пластическими свойствами, и аморфный вязкий наполнитель<sup>1</sup>. В силу такого строения древесина является анизотропным и неоднородным материалом. С феноменологической точки зрения анизотропия проявляется в зависимости сопротивления и деформативности от направления усилия относительно волокон; при действии силы вдоль волокон прочность и жесткость древесины существенно выше, чем при действии поперек волокон. Поскольку в строительных конструкциях деревянные стержни воспринимают усилия, действующие вдоль волокон, изложение ограничивается этим важнейшим случаем.

Древесина не обладает свойством старения, поэтому в исследованиях, посвященных длительному деформированию древесины, обычно отсчет времени проводится от начала приложения нагрузки ( $t = 0$ ). Прочность и деформативность древесины зависят от влажности  $W$  и температуры  $\vartheta$ . При повышении влажности от нуля до точки насыщения волокон ( $W \approx 30\%$ ) прочность понижается, деформативность увеличивается. Повышение температуры тоже приводит к уменьшению прочности и возрастанию деформативности.

Для сопоставимости результатов различных экспериментальных исследований введены понятия стандартной влажности ( $W = 15\%$ ) (по Рекомендациям комиссии СЭВ, 12%) и стандартной температуры ( $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ ); имеются указания по пересчету прочности при влажности и температуре, отличных от стандартных.

<sup>1</sup> Наличие ярко выраженного скелета и наполнителя характерно и для таких искусственных материалов, как слоистые пластики ДСП и стеклопластики; поведение этих материалов под нагрузкой во многом аналогично поведению древесины [135].

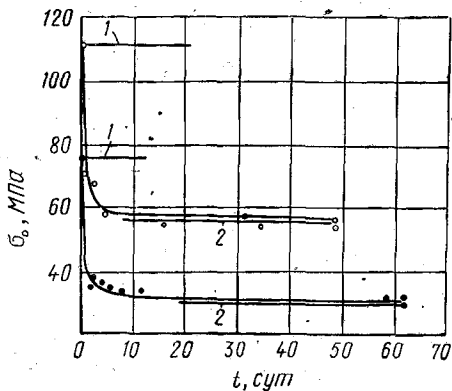


Рис. 19. Кривые длительного сопротивления древесины сосны вдоль волокон

○ — растяжение; ● — сжатие; 1 — кратковременная прочность; 2 — предел длительного сопротивления;  $W = 10\%$ ,  $\vartheta = 18-20^\circ \text{C}$

В силу ранее сказанного можно провести внешнюю аналогию между влиянием медленного монотонного понижения влажности и температуры и явлением старения. Применительно к высыханию древесины этот вопрос рассмотрен в п. 4 гл. II.

При длительном действии нагрузки вдоль волокон наличие неоднородности приводит к перераспределению усилий между отдельными составляющими: в упругом скелете усилия увеличиваются, в вязком заполнителе уменьшаются. В условиях относительно высоких длительно действующих напряжений в элементах скелета возникают местные нарушения связей, способные привести к разрушению древесины в течение ограниченного отрезка времени [11]. На рис. 19 представлены экспериментальные точки и кривые длительного сопротивления древесины сосны вдоль волокон при растяжении и сжатии  $R(t_p)$ , т. е. кривые, показывающие за-

Таблица 12. Значения  $R^*$  и  $\eta^*$  для древесины сосны, бука и дуба при действии силы вдоль волокон

| Материал | Деформация | $R^*$ , МПа | $\eta^*$ |
|----------|------------|-------------|----------|
| Сосна    | Сжатие     | 33,2        | 0,44     |
|          | Растяжение | 56,4        | 0,52     |
| Бук      | Сжатие     | 31          | 0,47     |
|          | Растяжение | 86,3        | 0,44     |
| Дуб      | Сжатие     | 43          | 0,6      |
|          | Растяжение | 55,5        | 0,46     |



зависимость между значениями напряжений и временем превышения образцов под нагрузкой до разрушения  $t_p$  [135].

В табл. 12 представлены значения  $R^* = R^*(\infty)$  и  $\eta^* = R^*/R$ , заимствованные из работы [135]. В статье [48] для определения  $\eta^*$  древесины рекомендуется формула

$$\eta^*(t) = 1,03 \left( 1 - \frac{\lg t}{17,1} \right), \quad (66)$$

причем  $t$  — продолжительность действия постоянной нагрузки, с. Подсчеты по этой формуле приводят к таким значениям:  $t = 25$  лет,  $\eta^* = 0,494$ ;  $t = 50$  лет,  $\eta^* = 0,476$ .

## 2. ВЛИЯНИЕ УРОВНЯ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ ПОСТОЯННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

При мгновенном формировании напряжений, не превышающих предела прочности при сжатии или растяжении  $R$ , в древесине развиваются упругомгновенные деформации  $\varepsilon_y$ , линейно связанные с напряжениями; при  $\sigma \geq R$  — пластические деформации. Практически в экспериментальных исследованиях упругие (упругомгновенные) деформации обычно определяют при ступенчатом нагружении как сумму деформаций, сформировавшихся на каждой ступени приложения нагрузки. При длительном действии нагрузки в древесине развиваются деформации ползучести  $\varepsilon_{II}(t)$ ; при постоянных напряжениях — простая ползучесть. На рис. 20 изображены экспериментальные точки [135], относящиеся к случаю постоянных напряжений и соответствующие отношениям, равным характеристикам ползучести  $\varphi(t) = \varepsilon_{II}(t)/\varepsilon_y$  [см. (20)]. Из рисунка отчетливо видно, что при развитии деформаций во времени существуют два характерных участка: на первом скорость ползуче-

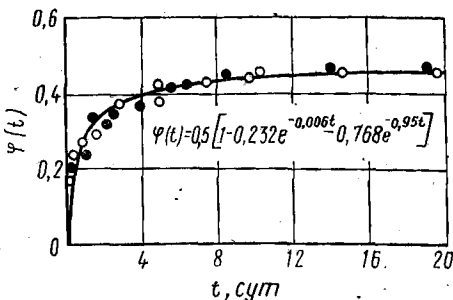


Рис. 20. Экспериментальные данные об увеличении во времени характеристики ползучести  $\varphi(t)$  древесины дуба при растяжении вдоль волокон  
 ● —  $\sigma = 35$  МПа; ○ —  $\sigma = 60$  МПа

сти достаточно высока, на втором постепенно затухает и стремится к нулю. Практическое совпадение значений  $\varphi(t)$  при различных напряжениях в условиях линейности упругомгновенных деформаций свидетельствует о линейной зависимости и между напряжениями и деформациями ползучести. Исследования показали, что такой характер длительного деформирования имеет место при напряжениях, не превышающих предела длительного сопротивления,<sup>1</sup> т. е. при  $\sigma < R^*$ .

В силу сказанного при  $\sigma < R^*$ , т. е. в линейной области, деформация простой ползучести древесины может быть представлена в виде

$$\varepsilon_{\text{п}}(\sigma, t) = \sigma C(t), \quad (67)$$

аналогичном (19); при этом  $\varepsilon_{\text{п}}$  и  $C$  должны удовлетворять условиям (8). Очевидно также, что полную относительную деформацию ползучести [см. (21)] удобно записать так:

$$\delta(t) = \frac{1}{E} + C(t) = \frac{1}{E} + C_0 f(t), \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1. \quad (68)$$

Для определения меры ползучести древесины удобно использовать формулу (49), положив  $\tau_1 = 0$ ; на рис. 20 нанесена соответствующая кривая  $\varphi(t) = EC(t)$ , построенная по экспериментальным точкам [135].

В работе [47] для описания  $\varphi(t)$  применительно к элементам деревянных конструкций рекомендуется формула

$$\varphi(t) = bt^0,21, \quad (69)$$

причем коэффициент  $b$  определяется с учетом влияния равновесной влажности древесины  $\omega_p$ , %,

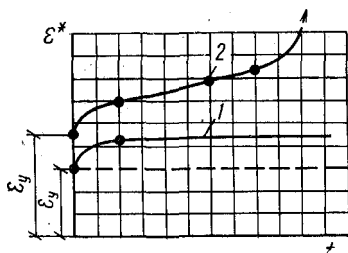
$$b = \frac{10^{-2}}{0,735 - 0,02086\omega_p}.$$

При  $R^* < \sigma < R$  кривые простой ползучести древесины имеют три характерных участка: на первом скорость деформирования велика, но постепенно затухает, на втором практически постоянна, на третьем увеличивается до момента разрушения (рис. 21) [70]. Очевидно, что прекращение затухания скорости (на конце первого участка) связано с началом развития пластических деформаций. При возрастании напряжений увеличивается угол наклона и

<sup>1</sup> В теории длительного деформирования древесины деформации ползучести, развивающиеся при  $\sigma < R^*$ , обычно называют деформациями упругого последствия.

Рис. 21. Характер развития полных деформаций древесины при сжатии, изгибе и скалывании вдоль волокон при различных уровнях постоянных напряжений

1 —  $\sigma < R^*$ ; 2 —  $R^* < \sigma < R$



уменьшается длина третьего участка. Это обстоятельство указывает на пластический характер деформирования на третьем участке и наличие соответствия между скоростью и уровнем напряжений [135]. Выявлено, что значение деформаций в конце первого участка и скорость деформирования на втором участке при  $R^* < \sigma < 1,4 R^*$  линейно связаны со значением напряжений [135].

### 3. ДЛИТЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДРЕВЕСИНЫ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ. ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ

На рис. 22 изображены экспериментальные точки и кривые полных относительных деформаций при сжатии древесины сосны вдоль волокон, вызванных постоянными напряжениями  $\sigma = 17 \text{ МПа} < R^*$  [135], действовавшими в течение ограниченного промежутка времени. Прежде всего видно, что после разгрузки развиваются деформации упругого последействия, т. е. деформации, связанные со стремлением упругого скелета к восстановлению своих размеров. Деформации последействия и ползучести равны по абсолютным значениям. Следовательно, не только упругие, но и деформации ползучести полностью обратимы. Исследования показали, что это положение сохраняется и при более сложных режимах изменения нагрузок во времени. Все сказанное позволяет считать, что для полных деформаций древесины при уровне напряжений  $\sigma < R^*$  справедлив принцип наложения, т. е. полные деформации при нагружении, ступенчатом во времени, могут определяться как сумма деформаций от каждой ступени [(60) при  $\varepsilon_n = 0$ ].

Кривые на рис. 23 свидетельствуют о неполной обратимости деформаций ползучести древесины при  $R^* < \sigma = 31 \text{ МПа} < R$ ; упругое последействие по абсолютному значению меньше деформаций ползучести. Очевидно, что по-

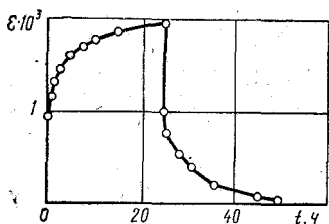


Рис. 22. Полные деформации древесины сосны при сжатии вдоль волокон при действии напряжений  $\sigma = 17 \text{ МПа} < R^*$  на конечном отрезке времени

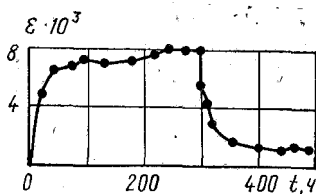


Рис. 23. Полные деформации древесины сосны при сжатии вдоль волокон при действии напряжений  $\sigma = 31 \text{ МПа} > R^*$  на конечном отрезке времени

следнее является следствием местных нарушений связей скелета при длительном действии относительно высоких сжимающих напряжений. Поэтому для древесины при длительном действии напряжений  $R^* < \sigma < R$  характерно образование пластических деформаций, названных в теории ползучести бетона необратимыми деформациями первого рода  $\epsilon_n$ .

Учитывая, что в рассматриваемом диапазоне напряжений  $R^* < \sigma < R$  сохраняется линейная зависимость между напряжениями и упругими деформациями,  $\epsilon_n$  естественно рассматривать, как оценку погрешности, связанную с применением принципа наложения к полным деформациям древесины [см. (61)].

#### 4. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ ВЛАЖНОСТИ НА ДЛИТЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДРЕВЕСИНЫ

Несмотря на хорошую изученность зависимостей между влажностью и прочностью древесины, влияние переменной влажности на характеристики длительной деформативности известно значительно слабее. Имеющихся отдельных экспериментальных данных еще явно недостаточно для относительно полного описания поведения элементов деревянных конструкций при различных влажностных режимах, в том числе при таком естественном режиме, как высыхание.

С другой стороны, наличие соответствующей внешней аналогии делает весьма заманчивым использование аппарата, разработанного применительно к описанию влияния старения на напряженно-деформированное состояние твер-

дого тела, для описания влияния высыхания. Поэтому содержание данного параграфа, основанное на результатах одного исследования [111], следует рассматривать только как возможную схему решения поставленной задачи.

При увеличении влажности упругомгновенные деформации и ползучесть древесины увеличиваются. На рис. 24 показаны кривые развития во времени прогибов балок  $f(W_j, t)$ , изготовленных из древесины тополя и нагруженных постоянной длительно действующей нагрузкой, вызывающей нормальные напряжения  $\sigma < R^*$ . Для обеспечения как заданных значений влажности, так и их постоянства на протяжении опыта балки ( $12 \times 6 \times 350$  см) выпиливали из свежесрубленных стволов и покрывали гидроизоляцией. Поскольку в реальных условиях потеря влаги происходит постепенно, то влажность высыхающей древесины связана с продолжительностью процесса. Приняв определенную зависимость между влажностью  $W$  и моментом приложения нагрузки  $\tau$  ( $\tau = \tau_0$  — момент начала отсчета) и сместив кривые  $f(\tau_i)$  по горизонтали так, чтобы начало каждой кривой совпало с влажностью древесины  $W_i$  в момент времени  $\tau_i$ , можно получить семейство кривых, характеризующих деформативность высыхающих балок в зависимости от  $\tau$ . Естественно, что такое уменьшение деформативности удобно рассматривать как результат своеобразного старения, связанного с высыханием. Поскольку опыты проводились при  $\sigma < R^*$ , т. е. в области линейного деформирования, то с помощью гипотезы плоских сечений можно перейти от прогибов к деформациям крайних волокон и приближенно построить семейство кривых мер ползучести

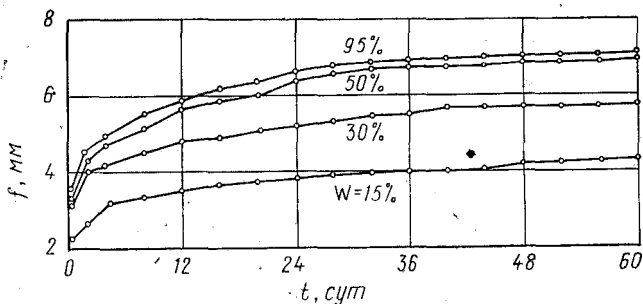


Рис. 24. Развитие во времени прогибов балок при различной влажности древесины тополя

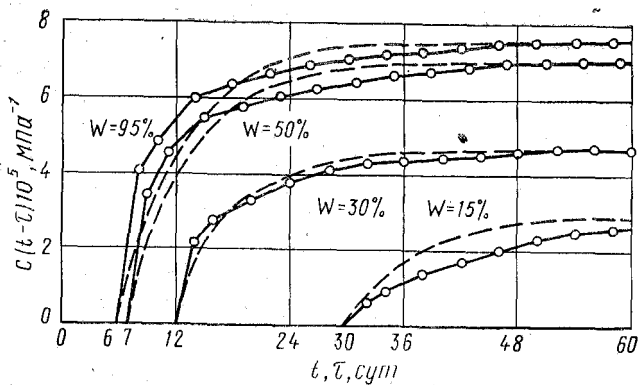


Рис. 25. Кривые меры ползучести высыхающей древесины тополя ( $\tau=0$  — начало отсчета)

при сжатии и растяжении древесины, высыхающей по заданному закону.

На рис. 25 представлены такие кривые для древесины тополя при следующем изменении влажности древесины:  $\tau = 6$  дней,  $W = 95\%$ ;  $\tau = 7$  дней,  $W = 50\%$ ;  $\tau = 12$  дней,  $W = 30\%$ ;  $\tau = 30$  дней,  $W = 15\%$ . Кривые могут быть описаны с помощью формул (44), (45), если  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = 0$ , и первой формулы (46), т. е. с помощью выражения

$$\left. \begin{aligned} C(t, \tau) &= (C_0 + Ae^{-\gamma\tau}) [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}]; \\ C_0 &= 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ (МПа)}^{-1}; A = 10,95 \cdot 10^{-5} \text{ (МПа)}^{-1}; \\ \gamma &= \gamma_1 = 0,15 \text{ 1/сут.} \end{aligned} \right\} (70)$$

### ГЛАВА III

## ЗАВИСИМОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА

### 1. ГИПОТЕЗЫ И ПРЕДПОСЫЛКИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА

В настоящее время для расчета строительных конструкций применяется теория ползучести, называемая наследственной теорией старения. Эта теория, как и теория упругости, изучает напряженно-деформированное состояние тела, обладающего определенными четко сформулированными

свойствами. Линейный вариант наследственной теории старения построен на основе таких гипотез и предпосылок:

1) рассматривается сплошное однородное и изотропное тело;

2) характеристики деформативности тела (мера ползучести и модуль упругомгновенных деформаций) определяются при стационарных режимах;

3) полные деформации тела складываются из упругомгновенных деформаций, возникающих в момент приложения нагрузки, и деформаций ползучести, развивающихся при длительных воздействиях;

4) для полных деформаций справедлив принцип наложения;

5) между напряжениями и упругомгновенными деформациями существует линейная зависимость.

Гипотезы 1 и 5, а также первая часть предпосылки 3 относятся к теории упругости; выполнение предпосылки 3 в целом обеспечивается соответствующей обработкой экспериментальных данных [см. (4) и (22)]. Наиболее специфичная гипотеза — принцип наложения, формулируется следующим образом: полная деформация при переменных напряжениях может быть найдена как сумма полных деформаций, вызванных соответствующими приращениями напряжений; считается, что полная деформация от данного приращения напряжений прямо пропорциональна величине приращения и зависит от длительности действия этого приращения, но не зависит от значений и длительности действия других приращений напряжений. Вследствие линейности упругомгновенных деформаций принцип наложения часто формулируется применительно к деформациям ползучести.

Принцип наложения позволяет определять полные деформации при различных законах изменений напряжений во времени на основе семейства кривых, описывающих полные относительные деформации  $\delta(t, \tau)$ ; т. е. кривых, соответствующих простой ползучести (см. рис. 11). Создается возможность для суммирования деформаций, вызванных постоянными напряжениями, прикладываемыми:

в один момент времени

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t) &= \Delta\sigma_1(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \Delta\sigma_2(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \dots + \\ &+ \Delta\sigma_n(\tau_1) \delta(t, \tau_1) = \sigma(\tau_1) \delta(t, \tau_1); \quad (71) \\ \sigma(\tau_1) &= \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \dots + \Delta\sigma_n; \end{aligned}$$

В различные моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$

$$\varepsilon^*(t) = \Delta\sigma_1(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \Delta\sigma_2(\tau_2) \delta(t, \tau_2) + \dots + \Delta\sigma_n(\tau_n) \delta(t, \tau_n). \quad (72)$$

Последняя формула может быть обобщена на случай напряжений, изменяющихся во времени по произвольному закону

$$\varepsilon^*(t) = \sigma(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (73)$$

Считается также, что принцип наложения применим к полным деформациям, развивающимся в направлениях, нормальных направлению действия силы, т. е. и при определении деформаций при двух- и трехмерных напряженных состояниях (см. п. 8 гл. III).

Предпосылка 2 связана с использованием в формулах (72) и (73) семейства кривых  $\delta(t, \tau_i)$ , относящихся к различным возрастам материала в моменты загрузки. Естественно, что для стареющего тела (в частности, бетона) соответствующие опыты должны проводиться в совершенно идентичных условиях. В случае применения теории к нестаряющему, высыхающему телу, например к древесине, изменение влажности рассматривается как своеобразное старение, и кривые  $\delta(t, \tau_i)$  строятся при различных стационарных влажностях (п. 4 гл. II). Имеются отдельные предложения по учету влияния на деформативные свойства материала изменения влажности и температуры на протяжении изучаемого промежутка времени [3, 25, 108].

Феноменологические основы рассматриваемой теории определяют ее основные достоинства и недостатки. К достоинствам относятся: во-первых, возможность использования расчетного аппарата теории сплошной среды для описания процесса длительного деформирования различных строительных материалов; во-вторых, возможность доведения до числа задач о напряженно-деформированном состоянии конструкций. Основным недостатком теории являются погрешности при описании сложных режимов изменения напряженного состояния во времени, связанные с применением принципа наложения (п. 6 гл. I, п. 3 гл. II).



## 2. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

**Наследственная теория старения.** В этой теории оказалось удобным понятие упругомгновенных напряжений (напряжений упругомгновенной задачи), т. е. напряжений, сформировавшихся в момент  $t$  при мгновенном введении воздействий в этот же момент времени [7].

Интегрирование по частям и элементарные преобразования позволяют переписать выражение (73) в виде

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (74)$$

В этом выражении первое слагаемое представляет упругомгновенную деформацию, т. е. деформацию в момент  $t$ , вызванную напряжением  $\sigma^*(t)$ , условно приложенным в этот же момент; второе слагаемое учитывает деформации ползучести и влияние старения. Так как в интервале  $\tau_1 < \tau < t$  всегда справедливо неравенство

$$\frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} < 0, \quad (75)$$

то при наличии ползучести полная деформация всегда больше упругомгновенной. Неравенство (75) является следствием уменьшения полной относительной деформации  $\delta(t, \tau)$  при приближении  $\tau$  к  $t$ .

Зависимость между напряжениями и деформациями может быть записана и в форме, отличающейся от (74),

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma^*(\tau)}{E(\tau)} L(t, \tau) d\tau, \quad (76)$$

где  $L(t, \tau)$  — «наследственная функция» — функция влияния предшествующих упругих деформаций на полную деформацию [30]. Из сопоставления (76) и (74), выполняемого с учетом (22), очевидно наличие зависимостей

$$L(t, \tau) = E(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau}; \quad L(t, \tau) = -\frac{1}{E(\tau)} \frac{\partial E(\tau)}{E(\tau)} + E(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}. \quad (77)$$

По аналогии с (74) записывается формула для деформации сдвига

$$\gamma^*(t) = \frac{\tau(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right] d\tau, \quad (78)$$

где  $G(t)$  — модуль сдвига;  $\omega(t, \tau)$  — мера ползучести при сдвиге.

Поскольку в упругой стадии справедлива зависимость

$$G = \frac{E(\tau)}{2[1 + \nu_1(\tau)]}, \quad (79)$$

то аналогично при ползучести справедливо равенство [7]

$$\omega(t, \tau) = 2C(t, \tau)[1 + \nu_2(t, \tau)], \quad (80)$$

причем  $\nu_1(\tau)$  — коэффициент поперечных деформаций в упругой стадии;  $\nu_2(t, \tau)$  — то же, при ползучести.

В силу (79) и (80)

$$\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) = 2[\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)], \quad (81)$$

где  $\delta_1(t, \tau)$  — полная относительная поперечная деформация, равная

$$\delta_1(t, \tau) = \frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)} + \nu_2(t, \tau) C(t, \tau). \quad (82)$$

В соответствии с (82) формула (78) принимает вид

$$\gamma^*(t) = 2 \left\{ \frac{[1 + \nu_1(t)] \tau(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\}. \quad (83)$$

В наследственной теории старения модуль упругомгновенных деформаций  $E(\tau)$  и мера ползучести  $C(t, \tau)$  аппроксимируются с помощью функций, показанных в табл. 9 применительно к интенсивно стареющему и стареющему бетону. В некоторых случаях удобно использовать выражения, основанные на представлении деформаций ползучести в виде суммы обратимых и необратимых деформаций [85, 98, 137]

$$C(t, \tau) = C(t - \tau) + C(t, \tau_0) - C(\tau, \tau_0) \quad (84)$$

или в виде

$$C(t, \tau) = \theta(\tau) f(t - \tau) + C(t, \tau_0) - C(\tau, \tau_0). \quad (85)$$

**Частные случаи: теория упругой наследственности и теория старения.** Для описания деформирования тел, не обладающих старением, и тел, нагруженных в старом возрасте, применяется теория упругой наследственности. В этой теории в дополнение к гипотезам, сформулированным в предыдущем пункте, считается, что деформация ползучести есть функция только продолжительности действия нагрузки  $t - \tau$ , а модуль упругомгновенных деформаций не зависит от  $\tau$ , т. е.

$$E(\tau) = E = \text{const}; \quad \delta(t, \tau) = \delta(t - \tau) = \frac{1}{E} + C(t - \tau); \quad \frac{\partial \delta(t - \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial C(t - \tau)}{\partial \tau}. \quad (86)$$

Вследствие рассмотрения нестарееющего тела и принятия принципа наложения теория упругой наследственности постулирует полную обратимость деформации ползучести.

В теории упругой наследственности для аппроксимации меры  $C(t - \tau)$  применяются выражения, приведенные в табл. 9 применительно к старому бетону. При этом функция  $f(t - \tau)$ , т. е. функция, стоящая в квадратных скобках (49), может включать произвольное число слагаемых  $B_i e^{-\gamma_i(t - \tau)}$  [см. (30)].

Для нестарееющих материалов рекомендуется также функция [106, 108, 54]

$$\frac{\partial C(t - \tau)}{\partial \tau} = -K(t - \tau) = -\frac{A}{T^q} \frac{e^{-\gamma_1(t - \tau)}}{(t - \tau)^p} \quad (0 < p < 1), \quad (p + q = 1), \quad (87)$$

где  $A, q, p$  — безразмерные величины;  $T$  — имеет размерность времени.

Деформации ползучести  $\varepsilon_{II}(t)$  при аппроксимации (87) удовлетворяют первому и стоящему в скобках условиям (8), т. е. имеют особенность при  $t - \tau = 0$ .

Если

$$C(t - \tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma_1(t - \tau)}], \quad (88)$$

то интегральная зависимость (74) может быть сведена к дифференциальной

$$mE\dot{\varepsilon}^* + N\varepsilon^* = m\dot{\sigma}^* + \sigma^*, \quad m = 1/\gamma_1(1 + \varphi), \quad (89)^*$$

\* Точками сверху здесь и далее обозначены производные по  $t$ .

описывающей «упрощенный закон линейного деформирования» [108].

При мгновенной деформации, пренебрегая в (89) слагаемыми, содержащими  $\varepsilon^*$  и  $\sigma^*$ , по сравнению со слагаемыми, пропорциональными  $\dot{\varepsilon}^*$  и  $\dot{\sigma}^*$ , приходим к линейной зависимости, связывающей напряжения и деформации с помощью модуля упругомгновенной деформации  $E$ . При медленных длительных процессах, характерных для зоны затухания деформаций ползучести, когда можно пренебречь величинами  $tE\varepsilon^*$  и  $t\sigma^*$  по сравнению с  $H\varepsilon^*$  и  $\sigma^*$ , приходим тоже к линейной зависимости между напряжениями и деформациями, но коэффициентом пропорциональности является величина  $H$ , называемая модулем полных деформаций (длительным, эффективным модулем),

$$\varepsilon^* = \sigma^*/H, H = E/(1 + \varphi), \varphi = EC_0. \quad (90)$$

Естественно, что теория упругой наследственности может применяться как для нестареющих, так и для старых (см. табл. 9) материалов. В частности, эта теория используется для расчетов элементов деревянных конструкций, эксплуатируемых в условиях постоянной температуры и влажности окружающей среды [107, 47].

Теория ползучести, созданная специально для расчета бетонных и железобетонных сооружений и названная теорией старения, основана на гипотезе о «параллельности» кривых ползучести [19, 35, 57, 119, 120]. Выражение для меры ползучести при переменных напряжениях в соответствии с «параллельностью» кривых записывается так ( $\tau_1 = 0$ ):

$$C(t, \tau) = \frac{1}{E(0)} [\varphi(t) - \varphi(\tau)], \quad \varphi(t) = E(0) C(t, 0), \quad (91)$$

где  $\varphi(t)$  и  $\varphi(\tau)$  — характеристики ползучести<sup>1</sup>.

Вследствие гипотезы о «параллельности» кривых ползучести эта теория постулирует неограниченное уменьшение ползучести по мере увеличения возраста материала к моменту формирования приращений напряжений, т. е. по мере старения, при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $C(t, 0) \rightarrow 0$  и полную необратимость деформации ползучести.

Достоинством теории старения является возможность в ряде случаев получать расчетные формулы, содержащие

<sup>1</sup> Сопоставление второй формулы (91) с (21) свидетельствует о своеобразной трактовке понятия характеристики ползучести в теории старения.

непосредственно  $\varphi(t)$  без предварительного выбора выражения для аналитического описания этой функции. Однако в настоящее время при широком внедрении в практику ЭВМ это достоинство расчетного порядка не может компенсировать существенных недостатков теории. Даже для стареющего бетона, применительно к которому была создана теория, результаты решения релаксационных задач существенно отличаются от опытных данных. При рассмотрении продольно-поперечного изгиба линейная теория старения приводит к формуле (267), свидетельствующей о независимости кривых развития перемещений от значения силы  $P$ , т. е. об отсутствии явления потери длительной устойчивости (см. рис. 39).

Можно показать зависимость между мерами ползучести теории упругой наследственности  $C(t - \tau)$  и теории старения (91). Для этого необходимо разложить  $C(t - \tau)$  в ряд Тейлора

$$C(t - \tau) = C(0) + \frac{t - \tau}{1!} C'(0) + \frac{(t - \tau)^2}{2!} C''(0), \quad (92)$$

удержать в этом выражении только два первых члена, учесть, что  $C(0) = 0$ , и получить выражение

$$C(t - \tau) = C'(0)t - C'(0)\tau, \quad (93)$$

представляющее меру как разность между ординатами прямых, имеющих угловой коэффициент  $C'(0)$ . Изменение масштаба времени позволяет привести это выражение к (91).

В течение последнего десятилетия были предприняты попытки создания так называемой модифицированной теории старения [35, 57], основанные на допущении о мгновенном формировании части деформации ползучести [1].

### 3. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Если рассматривать сжатый или растянутый стержень, выполненный из материала, обладающего упругими свойствами, ползучестью, а также старением, и считать, что деформации  $\varepsilon^*(t)$  известны, то зависимости (74) и (76) можно трактовать как уравнения относительно неизвестных  $\sigma^*(t)$  и  $\sigma^*(t)/E(t)$ .

Для учета влияния вынужденных деформаций к правым частям (74) и (76) необходимо прибавить  $\varepsilon_0(t)$ . В стержне,

жестко заделанном по концам, суммарные деформации равны нулю, т. е.

$$\varepsilon^*(t) + \varepsilon_0(t) = 0, \quad \varepsilon^*(t) = -\varepsilon_0^*(t). \quad (94)$$

С учетом последнего равенства можно из (76) получить уравнение

$$\frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma^*(\tau)}{E(\tau)} L(t, \tau) d\tau = -\varepsilon_0(t), \quad (95)$$

позволяющее разыскать, с учетом влияния ползучести и старения, напряжение  $\sigma^*(t)$ , вызванное вынужденными деформациями  $\varepsilon_0(t)$ .

Поскольку напряжение упругомгновенной задачи ( $\tau_1 = t$ ) в рассматриваемом случае определяется по формуле

$$\sigma(t) = -E(t) \varepsilon_0(t), \quad (96)$$

то (74) и вторая зависимость (94) позволяют представить уравнение для  $\sigma^*(t)$  в форме, несколько отличной от (95),

$$\sigma^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma(t). \quad (97)$$

При стационарных вынужденных деформациях [ $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$ ], в силу (75) и неравенства  $E(t) > E(\tau)$ , из (97) следует, что при  $t > \tau_1$

$$\sigma^*(t) < \sigma(\tau_1). \quad (98)$$

Уменьшение во времени напряжений, возникших в момент введения стационарных вынужденных деформаций  $\tau_1$ , принято называть релаксацией (см. рис. 30). С механической точки зрения, процесс релаксации можно объяснить таким образом. При введении стационарных вынужденных деформаций возникают напряжения  $\sigma(\tau_1)$ , пропорциональные соответствующим упругомгновенным деформациям. В условиях сохранения значений полных деформаций развитие ползучести приводит к уменьшению упругомгновенных деформаций и, естественно, напряжений. Если стержень выполнен из материала, обладающего ползучестью и старением, то значение релаксации напряжений зависит как от возраста материала к моменту введения вынужденных деформаций, так и от продолжительности процесса.

К решению интегрального уравнения вида (95) или (97), т. е. интегрального уравнения Вольтерра второго рода, сво

дится не только решение рассмотренной задачи, но и решение еще ряда задач линейной теории ползучести (пп. 1—4 гл. IV, пп. 2, 6, 7 гл. VI). Поэтому это уравнение естественно назвать основным уравнением линейной теории ползучести.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ, ПРЕДСТАВЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Выше мы исходили из результатов опытов, предусматривавших изучение развития деформаций при длительном действии внешних нагрузок. Значительное внимание было уделено простой ползучести, т. е. ползучести, проявляющейся при постоянных напряжениях. Понятие релаксации было введено на основании анализа уравнения (97), описывающего влияние ползучести и старения на напряженное состояние сжатого или растянутого стержня. Можно исходить и из данных опытов, предназначенных для изучения релаксации, используя понятия единичного напряжения  $p(t, \tau)$  и резольвенты  $R(t, \tau)$ . Единичным напряжением  $p(t, \tau)$  называется напряжение, необходимое для поддержания в призматическом брусе в любой момент  $t$  единичной деформации, введенной в момент  $\tau$  [1]. Очевидно, что при  $\tau = t$

$$p(t, \tau) = E(t). \quad (99)$$

Характер семейства кривых  $p(t, \tau)$  показан на рис. 26.

Напряжения, вызванные стационарными деформациями  $\varepsilon(\tau_1)$ , в силу принципа наложения определяются как произведение

$$\sigma^*(t) = \varepsilon(\tau_1) p(t, \tau). \quad (100)$$

При переменных во времени деформациях (рис. 26)

$$\sigma^*(t) = \varepsilon(\tau_1) p(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\varepsilon^*(\tau)}{d\tau} p(t, \tau) d\tau. \quad (101)$$

Интегрирование по частям и элементарные преобразования позволяют представить (101) в форме

$$\frac{\sigma^*(t)}{E(t)} = \varepsilon^*(t) - \int_{\tau_1}^t \varepsilon^*(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad (102)$$

причем функция  $R(t, \tau)$  определяется по формуле

$$R(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} \frac{\partial p(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (103)$$

и называется резольвентой.

Таким образом, в линейной теории ползучести существуют две формы зависимости между напряжениями и деформациями — (74) или (76) и (102). Первая основана на использовании понятия полной единичной деформации  $\delta(t, \tau)$  или наследственной функции  $L(t, \tau)$ , вторая — резольвенты  $R(t, \tau)$ . Поскольку  $\delta(t, \tau)$  строится по данным опытов, выполняемых при постоянных напряжениях, а  $R(t, \tau) [p(t, \tau)]$  — при постоянных вынужденных деформациях, то экспериментальное обеспечение зависимости (74) или (76) по техническим причинам проще, чем (102). В этом смысле использование формулы (74) или (76) более предпочтительно.

Но существует и другая сторона вопроса. Можно рассматривать формулу (102) как решение интегрального уравнения (76). Каждому виду функции  $L(t, \tau)$  отвечает определенная функция  $R(t, \tau)$ . Поэтому функцию  $R(t, \tau)$  называют резольвентой ядра  $L(t, \tau)$ . Если представить решение интегрального уравнения (76) в виде (102), то можно разыскать выражения для  $R(t, \tau)$ , соответствующие различным ядрам  $L(t, \tau)$ , а следовательно, и различным функциям, используемым для аппроксимации полной единичной деформации  $\delta(t, \tau)$ .

Таким образом, резольвента  $R(t, \tau)$  может быть построена не только на базе экспериментальных кривых  $p(t, \tau)$  (см. рис. 26), но и на основе функций, аппроксимирующих  $\delta(t, \tau)$ . Очевидно, что при наличии  $R(t, \tau)$  по формуле (102) с учетом (94) можно вычислить напряжения  $\sigma^*(t)$ , вызванные вынужденными деформациями  $\varepsilon_0(t)$  в стержне, жестко заделанном по концам, т. е. использовать эту формулу как решение уравнения (95). В случае стационарных вынужденных деформаций [ $\varepsilon_0(t) = \varepsilon(\tau_1) = \varepsilon_0 = \text{const}$ ] на основании (102), (94) и (96) можно записать

$$\sigma^*(t) = \sigma(t) H(t, \tau_1); \quad H(t, \tau_1) = 1 - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau. \quad (104)$$



Рис. 26. Кривые функции  $\rho(t, \tau)$  (а) и деформаций  $\varepsilon(\tau)$  (б)

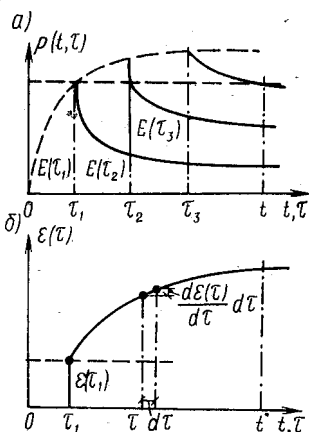
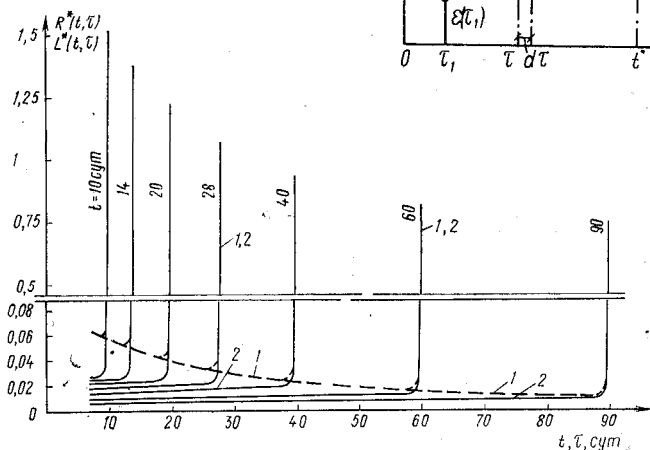


Рис. 27. Функции  $L^*(t, \tau)$  сут<sup>-1</sup> (кривые 1) и  $R^*(t, \tau)$  сут<sup>-1</sup> (кривая 2), построенные применительно к эталонному бетону;  $\tau_1 = 7$  сут



Выражение (102) с учетом (94) и (96) позволяет представить решение уравнения (94) через резольвенту  $R^*(t, \tau)$  ядра  $E(t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau}$

$$\sigma^*(t) = \sigma(t) - \int_{t_1}^t \sigma(\tau) R^*(t, \tau) d\tau; \quad R^*(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} \frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial \tau}. \quad (105)$$

При стационарных вынужденных деформациях первая формула (105) может быть переписана в виде

$$\sigma^*(t) = \sigma(\tau_1) H^*(t, \tau_1); \quad H^*(t, \tau_1) = \frac{E(t)}{E(\tau_1)} H(t, \tau_1). \quad (106)$$

Функция  $H(t, \tau_1)$  рассматривается как коэффициент уменьшения [7] (приведения [2]) напряжений вследствие ползучести;  $H^*(t, \tau_1)$  — как коэффициент затухания напряжений [23, 85]. Нетрудно показать существование такой зависимости

$$\rho(t, \tau_1) = E(\tau_1) H^*(t, \tau_1), \quad (107)$$

причем при  $E(\tau) = E(\tau_1) = E = \text{const}$

$$H^*(t, \tau_1) = H(t, \tau_1). \quad (108)$$

## 5. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Если исходить из кривых простой ползучести и значений упругомгновенных деформаций, т. е. считать, что известны функции  $E(\tau)$  и  $C(t, \tau)$ , то для получения резольвенты  $R(t, \tau)$  необходимо построить решение уравнения (76) в форме (102).

Достаточно просто решается интегральное уравнение (76) и разыскивается резольвента в теории упругой наследственности при использовании для аппроксимации меру ползучести выражения

$$C(t - \tau) = C_0 f(t - \tau) \quad (109)$$

при  $f(t - \tau)$  применительно ко второй формуле (30) и соответственно  $L(t - \tau)$ , равном

$$L(t - \tau) = -c \sum_1^n \gamma_i B_i e^{-\gamma_i(t - \tau)}, \quad c = EC_0. \quad (110)$$

В этом случае  $n$  уравнений, записанных путем  $n$ -кратного дифференцирования по  $t$  правой и левой частей уравнения (76), позволяют свести задачу определения  $\sigma^*(t)$  к решению линейного дифференцированного уравнения порядка  $n$  с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} D_n \overset{(n)}{\sigma^*}(t) + \dots + D_1 \dot{\sigma}^*(t) + D_0 \sigma^*(t) = \\ = A_n \overset{(n)}{\varepsilon^*}(t) + \dots + A_1 \dot{\varepsilon}^*(t) + A_0 \varepsilon^*(t). \end{aligned} \quad (111)$$

Уравнение (76) и соответствующие производные от 1-го до  $(n-1)$ -го порядка позволяют сформулировать необходимые начальные условия.

В табл. 13 приведены формулы для  $R(t, \tau)$ , полученные путем решения уравнения (76) в случаях  $n = 1$ ,  $B = 1$ ,  $B \neq 1$  и  $n = 2$ ,

При использовании выражения (87) формула для  $R(t, \tau)$  имеет вид бесконечного ряда, включающего  $\Gamma$ -функции (табл. 4 табл. 13), т. е. оказывается более сложной по сравнению с формулами, соответствующими (109) и (110) при  $n = 1, 2$ .

Ядро интегрального уравнения (74) в теории старения в соответствии с (91) и (77) зависит только от  $\tau$

$$L(\tau) = -\frac{1}{E(\tau)} \dot{E}(\tau) - \frac{E(\tau)}{E(0)} \dot{\varphi}(\tau). \quad (112)$$

При таком ядре дифференцирование по  $t$  правых и левых частей (76) приводит к дифференциальному уравнению первого порядка [119]

$$\frac{1}{E(t)} \dot{\sigma}^*(t) + \frac{1}{E(0)} \dot{\varphi}(t) \sigma^*(t) = \dot{\varepsilon}^*(t), \quad (113)$$

решаемому в квадратурах (см. строки 5 и 6 табл. 13).

В наследственной теории старения выделение дифференциального уравнения из интегрального уравнения (76) возможно при ядрах, называемых вырожденными, т. е. при ядрах, являющихся произведением функций  $\tau$  и  $t$  или суммой таких произведений [7]. Если мера ползучести представлена в виде (47) при  $B = 1$ , то ядро интегрального уравнения (76), согласно (77), записывается так:

$$L(t, \tau) = -\frac{1}{E(\tau)} \dot{E}(\tau) + E(\tau) \dot{\theta}(\tau) - E(\tau) e^{\gamma_1 \tau} [\dot{\theta}(\tau) + \gamma_1 \theta(\tau)] e^{-\gamma_1 t}, \quad (114)$$

т. е. состоит из суммы функции  $\tau$  и произведения функций  $\tau$  и  $t$ . При таком ядре после двукратного дифференцирования по  $t$  левых и правых частей (74) оказываются возможными выделение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами [7]

$$\ddot{\sigma}^*(t) + \left\{ \gamma_1 [1 + \varphi(\tau)] - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} \right\} \dot{\sigma}^*(t) = E(t) [\ddot{\varepsilon}^*(t) + \gamma_1 \dot{\varepsilon}^*(t)] \quad (115)$$

и формулировка соответствующих начальных условий

$$\begin{aligned} \sigma^*(\tau_1) &= \sigma(\tau_1); \\ \dot{\sigma}^*(\tau_1) &= -\gamma_1 \varphi(\tau_1) \sigma^*(\tau_1) + E(\tau_1) \dot{\varepsilon}^*(\tau_1), \end{aligned} \quad (116)$$

где  $\varphi(\tau) = E(t) \theta(\tau)$ .

Таблица 13. Некоторые зависимости, используемые в теории упругой наследственности и теории старения для аппроксимации  $C(t, \tau)$ , и соответствующие функции  $R(t, \tau)$ ,  $H(t, \tau_1)$ ,  $H(\infty, \tau_1)$

| Теория                   | Номер строки | $C(t, \tau)$          | $f(t-\tau)$  | $R(t, \tau)$   | $H(t, \tau_1)$  | $H(\infty, \tau_1)$     |
|--------------------------|--------------|-----------------------|--|--|---|-------------------------|
| Упругой наследственности | 1            | $C_0 f(t-\tau)$       | $1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}$  | $\gamma_1 \varphi e^{-r(t-\tau)}$ ; $\varphi = EC_0$ ,<br>$r = \gamma_1(1 + \varphi)$  | $\frac{1 + \varphi e^{-r(t-\tau)}}{1 + \varphi}$  | $\frac{1}{1 + \varphi}$ |
|                          | 2            | $C_0 f(t-\tau)$       | $1 - B e^{-\gamma_1(t-\tau)}$  | По формулам, записанным в 1-й строке, с заменой $\varphi$ на $\bar{\varphi} = \bar{E} \bar{C}_0$ , $\bar{E}$ на $E/[1 + \varphi(1 - B)]$ , $\bar{C}_0$ на $C_0 B$  |   |                         |
|                          | 3            | $C_0 \bar{f}(t-\tau)$ | $1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - B_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}$<br>$B_1 + B_2 = 1$ | $D_1 e^{-r_1(t-\tau)} + D_2 e^{-r_2(t-\tau)}$ ,<br>$\varphi = EC_0$<br>$D_1 = \frac{\varphi}{r_1 - r_2} [D(D\varphi - r_2) + \gamma_1^2 B_1 + \gamma_2^2 B_2]$<br>$D_2 = \varphi D - D_1$ ; $\varphi = EC_0$ ;<br>$D = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2$<br>$r_{1,2} = 0,5 (n_1 \mp \sqrt{n_1^2 - 4n_2})$<br>$n_1 = \gamma_1 + \gamma_2 + \varphi D$ ;<br>$n_2 = (1 + \varphi) \gamma_1 \gamma_2$ | $1 - \frac{D_1}{r_1^2} [1 - e^{-r_1(t-\tau_1)}] - \frac{D_2}{r_2} [1 - e^{-r_2(t-\tau_1)}]$ | $\frac{1}{1 + \varphi}$ |

Продолжение

| Теория                   | Номер строки | $C(t, \tau)$                              | $f(t-\tau)$  | $R(t, \tau)$  | $H(t, \tau_1)$   | $H(\infty, \tau_1)$   |
|--------------------------|--------------|---|--|---|--|---|
| Упругой наследственности | 4            | $-\frac{A}{T^q} f(t-\tau)$<br>$0 < q < 1$ | $\int \frac{e^{-\gamma_1(t-\tau)}}{(t-\tau)^p} d\tau$<br>$p + q = 1$ | $\frac{e^{-\gamma_1(t-\tau)}}{t-\tau} \times \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{A^j \Gamma^j(q)}{\Gamma(jq)} \times \left(\frac{t-\tau}{T}\right)^{jq}$<br>$j = 1, 2, 3, \dots$ $\Gamma$ -функция | $1 - \int_0^t \frac{e^{-\gamma_1(t-\tau)}}{t-\tau} \times \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{A^j \Gamma^j(q)}{\Gamma(jq)} \times \left(\frac{t-\tau}{T}\right)^{jq} d\tau$ | $\frac{(T\gamma_1)^q}{(T\gamma_1)^q + A\Gamma(q)}$                  |
| Старения                 | 5            | $\frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{E(0)}$ | —  | $\frac{1}{E(t)} \times \left[ - \int \frac{E(\tau)}{E(0)} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau) d\tau \right] \times \frac{\partial}{\partial \tau} [E(\tau) e^{\tau}]$                      | $e^{-[1 + 0,5\delta\varphi(t)]\varphi(t)}$ ,<br>[при $E(\tau) = \frac{E_0}{1 + \delta\varphi(\tau)}$ ]   | $e^{-[1 + 0,5\delta\varphi]\varphi}$<br>$\varphi = \varphi(\infty)$ |
|                          | 6            | $\frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{E(0)}$ | —  | $e^{-\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{\varphi(\tau)}$  | $e^{-\varphi(t)}$ , при $E(\tau) = E = \text{const}$   | $e^{-\varphi}$ , $\varphi = \varphi(\infty)$                        |

76 Таблица 14. Некоторые зависимости, используемые в наследственной теории старения для аппроксимации  $C(t, \tau)$ , и соответствующие функции  $R(t, \tau)$ ,  $H(t, \tau_1)$  и  $H(\infty, \tau_1)$

| Номер строки   | $f(t-\tau)$               | $R(t, \tau)$   | $H(t, \tau_1)$   | $H(\infty, \tau_1)$  |
|--|---------------------------|--|--|--|
| $C(t, \tau) = \theta(\tau) f(t-\tau); \theta(\tau) = C_0 + Ae^{-\nu\tau}; E(\tau) = E(\tau_1) = E$ |                           |  |  |  |
| 1  | $1 - e^{-\nu_1(t-\tau)}$  | $\frac{1}{E(t)} \{ \dot{E}(\tau) + \nu_1 E(\tau) \times$ $\times \Phi(\tau) - \nu_1 \frac{\partial}{\partial \tau} [\Phi(\tau) e^{\eta(\tau)}] \times$ $\times \int_{\tau_1}^t E(\tau) e^{-\eta(\tau)} d\tau$ $\eta(\tau) = \nu_1 \int_{\tau_1}^{\tau} [1 + \Phi(z)] dz$ | $1 - \frac{a+c}{1+c} [F_1(0) - F_1(z) K_1(z)]$ $K_1(z) = \exp \left[ -\nu_1 (1+c) z - \frac{a}{\xi} (1 - e^{-\nu z}) \right];$ $\xi = \frac{\nu}{\nu_1}, z = (t - \tau_1); F_1(z) = 1 - \frac{ae^{-\nu z}}{1+c+\xi} +$ $+ \frac{a^2 e^{-2\nu z}}{(1+c+\xi)(1+c+2\xi)} - \dots;$ $c = EC_0, a = EAe^{-\nu\tau_1}$   | $1 - \frac{a+c}{1+c} F(0)$   |
| 2  | $1 - Be^{-\nu_1(t-\tau)}$ | По формуле, записанной в 1-й строке, с заменой $E(\tau)$ на $\bar{E}(\tau) = \bar{\nu}E(\tau)$ и $\theta(\tau)$ на $\bar{\theta}(\tau) = B\theta(\tau)$ , где  | $\bar{\nu}(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{B(a+c)\bar{\nu}(\tau_1)}{(1+c)\bar{\nu}(\infty)} [F(\tau_1) - F(t)K(t)] \right\};$ $K(t) = \exp \left\{ -\nu_1 (1+c)\bar{\nu}(\infty) z + \right.$  | $\times \left[ 1 - \frac{\bar{\nu}(\tau_1) \times B(a+c)\bar{\nu}(\tau_1)}{(1+c)\bar{\nu}(\infty)} \times F(\tau_1) \right]$ |
|  |                           | $\bar{\nu}(\tau) = \frac{1}{1 + E(\tau)\theta(\tau)(1-B)}$   | $+ \left[ \frac{B\bar{\nu}(\infty)}{\xi(1-B)} - 1 \right] \ln \frac{\bar{\nu}(\tau_1)}{\bar{\nu}(t)};$ $F(t) = 1 + L_1 \zeta(t) + L_1 L_2 \zeta^2(t) + \dots,$ $\zeta(t) = a(t)\bar{\nu}(t), a(t) = AEe^{-\nu t};$ $L_1 = \frac{\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)}{1 + \xi + Bc\bar{\nu}(\infty)},$ $L_2 = \frac{2\xi(1-B) - B\bar{\nu}(\infty)}{1 + 2\xi + Bc\bar{\nu}(\infty)},$   |  |
| $\Phi(\tau) = B_0 + B_1/(\gamma + \tau), E(\tau) = E(\infty)(1 - \beta e^{-\alpha\tau})$           |                           |  |  |  |
| 3  | $1 - e^{-\nu_1(t-\tau)}$  | По формуле, записанной в 1-й строке  | $\frac{E(t_1)}{E(t)} - \gamma\Phi(\tau_1) \frac{E(\infty)}{E(t)} e^{r\tau_1} (\gamma + \tau_1)^p \left\{ \frac{e^{r\tau}}{r^{1-p}} \times \right.$ $\times [\Phi[r(\gamma+t), p] - \Phi[r(\gamma+\tau_1), p]] -$ $- \frac{\beta e^{-r(\gamma+\alpha)}}{(r+\alpha)^{1-p}} [\Phi[(\gamma+t)(r+\alpha), p] -$ $- \Phi[(\tau_1+\gamma)(r+\alpha), p]] \left. \right\}. r = \nu_1(1+B_0),$ $p = \nu_1 B_1, \Phi(\xi, p) = \int_0^\xi e^{-z} z^{-p} dz - \text{неполная}$ $\Gamma\text{-функция*}$ | По формуле для $H(t, \tau_1)$ , полагая $t = \infty$   |

\* Таблицы неполных  $\Gamma$ -функций см. [71, 85].

Поскольку (115) относительно  $\dot{\sigma}^*(t)$  является дифференциальным уравнением первого порядка, то оно решается в квадратурах [7, 85]

$$\begin{aligned} \sigma^*(t) = & e^*(\tau_1) [E(\tau_1) + \gamma_1 \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t E(\tau) e^{-\eta(\tau)} d\tau] + \\ & + \int_{\tau_1}^t E(\tau) \dot{e}^*(\tau) d\tau - \gamma_1 \int_{\tau_1}^t E(\tau) e^{-\eta(\tau)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(z) e^*(z) \times \\ & \times e^{\eta(z)} dz; \quad \eta(\tau) = \gamma_1 \int_{\tau_1}^{\tau} [1 + \varphi(z)] dz. \end{aligned} \quad (117)$$

С помощью этого решения Н. Х. Арутюнян получил формулы для вычисления  $\sigma^*(t)$  [7]. Выражения для резольвент, соответствующие ядру (114) [7, 64], а также аналогичному ядру при  $B \neq 1$ , приведены в табл. 14.

При использовании для аппроксимации  $\delta(t, \tau)$  более сложных выражений удобно определять ординаты резольвенты, например  $R^*(t, \tau)$ , с помощью зависимости [2, 108]

$$R^*(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t R^*(t, \xi) L^*(\xi, \tau) d\xi = L^*(t, \tau), \quad (118)$$

где введено обозначение

$$L^*(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Разбивка рассматриваемого периода времени от  $\tau_1$  до  $t_n$  на  $n$  промежутков так, чтобы на протяжении каждого промежутка можно было считать функции  $L^*$  и  $R^*$  линейными, позволяет выделить из (118) матричное уравнение, решаемое относительно вектора неизвестных  $R^*$

$$\Delta L^* \vec{R} = \vec{L}^*, \quad \vec{R}^* = \Delta L^*{}^{-1} \vec{L}^*.$$

При этом

$$\vec{R}^* = \begin{pmatrix} R^*(t_n, \tau_1) \\ R^*(t_n, \tau_2) \\ \dots \\ R^*(t_n, \tau_n) \end{pmatrix}, \quad \Delta L^* = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & \dots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{L}^* = \begin{pmatrix} L^*(t_n, \tau_1) \\ L^*(t_n, \tau_2) \\ \dots \\ L^*(t_n, \tau_n) \end{pmatrix}.$$

где

$$l_{in} = \frac{1}{6} (\tau_n - \tau_{n-1}) [2L^* (\tau_n, \tau_i) + L^* (\tau_{n-1}, \tau_i)],$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \tau_n = t_n;$$

$$l_{ij} = \frac{1}{6} [(\tau_{j+1} - \tau_j) L^* (\tau_{j+1}, \tau_i) + 2(\tau_{j+1} - \tau_{j-1}) L^* (\tau_j, \tau_i) + (\tau_j - \tau_{j-1}) L^* (\tau_{j-1}, \tau_i)] \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad j = 2, 3, \dots, n-1;$$

$$l_{ij} = 1 + \frac{1}{6} (\tau_{i+1} - \tau_i) [2L^* (\tau_i, \tau_i) + L^* (\tau_{i+1}, \tau_i)],$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad i = j.$$

В табл. 18 представлены значения резольвенты  $R^* (t, \tau)$  ядра  $L^* (t, \tau)$  при  $t = 60$  сут,  $\tau_1 = 7$  сут, вычисленные применительно к эталонному бетону при аппроксимации  $\delta (t, \tau)$  согласно (36), (42), (50). На рис. 27 построены соответствующие кривые  $L^* (t, \tau)$  и  $R^* (t, \tau)$ .

## 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ В СТЕРЖНЕ, ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННОМ ПО КОНЦАМ

**Формулы для напряжений.** В наиболее простом случае, каким является случай стационарных вынужденных деформаций  $\varepsilon_0 (t) = \varepsilon_0 (\tau_1) = \varepsilon_0$ , удобно выполнять вычисления с помощью первой формулы (104). Зависимости для коэффициента уменьшения напряжений  $H (t, \tau_1)$  при ядрах теории упругой наследственности и теории старения приведены в табл. 13; при ядрах наследственной теории старения — в табл. 14. Эти зависимости получены с помощью второй формулы (104) и выражений для резольвент, записанных в таблицах. Очевидно, что формулы для  $H (t, \tau_1)$  могут быть получены и непосредственно из решений уравнений, в частности из решения (117). Из (108) следует, что все выражения для  $H (t, \tau_1)$ , относящиеся к случаю постоянного модуля упругомгновенных деформаций, одновременно представляют и коэффициент затухания напряжений  $H^* (t, \tau_1)$ .

Из табл. 13 и 14 видно, что формулы для  $H (t, \tau_1)$  с учетом переменности модуля упругомгновенных деформаций во времени получены только с помощью теории старения при аппроксимации  $E (\tau)$  через  $\varphi (t)$  и наследственной теории старения в случае представления  $C (t, \tau)$  согласно (54) и (55) [см. рис. 10 и формулы (53), (20)]. Последнее свидетельст-

вует о том, что формула, записанная в 3-й строке табл. 14, как и остальные формулы этой таблицы, может применяться для не слишком интенсивно стареющих тел и, в частности, при условии аффинного подобия кривых простой ползучести.

Во многих практически важных случаях наибольший интерес имеет полное затухание напряжений, т. е. затухание напряжений, произошедшее за все время развития деформаций ползучести  $t = \infty$ ; формулы для коэффициентов  $H(\infty, \tau_1)$  показаны в последних столбцах табл. 13 и 14.

Между предельными значениями коэффициентов затухания напряжений, подсчитанными по формулам теории старения и теории упругой наследственности, нетрудно установить аналитическую зависимость. Если  $H^*(\infty, \tau)$  представить в форме, обычно применяемой в теории старения [при  $E(\tau) = E = \text{const}$ ]

$$H^*(\infty) = \frac{1}{e^\varphi}, \quad (119)$$

то, раскладывая  $e^\varphi$  в степенной ряд, получим

$$H^*(\infty) = \frac{1}{e^\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \dots} \quad (120)$$

При отбрасывании в разложении всех членов, кроме первых двух, эта формула превращается в формулу теории упругой наследственности

$$H^*(\infty) = \frac{1}{1 + \varphi}. \quad (121)$$

Из сравнения последних двух формул отчетливо видно, что теория старения приводит к большему затуханию напряжений, чем теория упругой наследственности. Это связано с тем, что зависимость, применяемая в теории старения для описания меры ползучести (91), постулирует полную необратимость деформаций ползучести и, как следствие этого, отсутствие восстановления напряжений в процессе релаксации. Мера ползучести теории упругой наследственности (86), напротив, описывает полностью обратимые деформации ползучести и приводит к максимально возможному восстановлению напряжений.

Из всего сказанного ясно, что значения коэффициентов затухания, подсчитанные на основании выражений для мер



наследственной теории старения, соответствующих частично обратимым деформациям ползучести, всегда расположены между значениями коэффициентов теории упругой наследственности и теории старения.

В табл. 15 приведены значения коэффициентов полного затухания напряжений  $H(\infty, \tau_1) = H^*(\infty, \tau_1)$ , вычисленные по формуле 1-й строки табл. 14, применительно к стержню, изготовленному из стареющего бетона. Функция  $\theta$  (28) принята согласно второй формуле (52) и формуле (53) в виде

$$\theta(28) = C(\infty, 28) (0,5 + 0,7e^{-28 \cdot 0,012}), \quad (122)$$

в силу чего использованы равенства

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,5C(\infty, 28); \quad A = 0,7C(\infty, 28); \quad c = 0,5\varphi(\infty, 28); \\ a &= 0,5\varphi(\infty, 28); \quad \varphi(\infty, 28) = E(28)C(\infty, 28). \end{aligned} \quad (123)$$

Кроме того, считалось, что  $\gamma_1 = 0,006$  1/сут и, естественно,  $\xi = 2$ . Поскольку зависимости (122) и (123) основаны на среднестатистических данных, значение  $C(\infty, 28)$  может быть вычислено в каждом конкретном случае по (27), а  $E(28)$  найдено по табл. 8, то табл. 15 позволяет определять  $H(\infty, \tau_1)$  с учетом всех основных факторов, влияющих на деформативные свойства бетона.

В табл. 16 приведены значения коэффициентов  $H(\infty, \tau_i) = H^*(\infty, \tau_i)$ , вычисленные по формуле 2-й строки табл. 14 и предназначенные для учета влияния ползучести на напряженные состояния бетонных элементов при стационарных и нестационарных вынужденных деформациях [см. (127)].

При вынужденных деформациях, переменных во времени, формулы, приемлемые для практического применения, могут быть получены на основе теории упругой наследственности [106]. В 1-й строке табл. 17 записана формула, выведенная при использовании простейшей резольвенты, представленной в табл. 13 [7].

При учете старения расчетные формулы резко усложняются. В теории старения относительно простые выражения получаются только тогда, когда вынужденные деформации  $\varepsilon_0(t)$  можно выразить через характеристику ползучести  $\varphi(t)$ . В наследственной теории старения в рассматриваемом смысле приемлемы приближенные формулы, выведенные в предположении изменения  $E(\tau)$  и оценки влияния ползучести на основе средней постоянной во времени меры (2-я строка табл. 17) [85].

Таблица 15. Значения коэффициентов уменьшения (затухания) напряжений (усилий)  $H(\infty, \tau_1)$  в зависимости от  $\varphi = \varphi(\infty, 28)$

| $H(\infty, 7)$ |       |           |       | $H(\infty, 28)$ |       |           |       | $H(\infty, 90)$ |       |           |       |
|----------------|-------|-----------|-------|-----------------|-------|-----------|-------|-----------------|-------|-----------|-------|
| $\varphi$      | $H$   | $\varphi$ | $H$   | $\varphi$       | $H$   | $\varphi$ | $H$   | $\varphi$       | $H$   | $\varphi$ | $H$   |
| 0              | 1     | 0,57      | 0,546 | 0               | 1     | 0,57      | 0,593 | 0               | 1     | 0,57      | 0,686 |
| 0,03           | 0,966 | 0,6       | 0,53  | 0,03            | 0,971 | 0,6       | 0,578 | 0,03            | 0,978 | 0,6       | 0,674 |
| 0,06           | 0,934 | 0,66      | 0,494 | 0,06            | 0,942 | 0,66      | 0,55  | 0,06            | 0,957 | 0,66      | 0,651 |
| 0,09           | 0,903 | 0,72      | 0,471 | 0,09            | 0,915 | 0,72      | 0,524 | 0,09            | 0,937 | 0,72      | 0,629 |
| 0,12           | 0,874 | 0,78      | 0,445 | 0,12            | 0,889 | 0,78      | 0,499 | 0,12            | 0,917 | 0,78      | 0,608 |
| 0,15           | 0,845 | 0,84      | 0,421 | 0,15            | 0,863 | 0,84      | 0,476 | 0,15            | 0,898 | 0,84      | 0,588 |
| 0,18           | 0,818 | 0,9       | 0,398 | 0,18            | 0,84  | 0,9       | 0,454 | 0,18            | 0,88  | 0,9       | 0,569 |
| 0,21           | 0,792 | 0,96      | 0,376 | 0,21            | 0,816 | 0,96      | 0,433 | 0,21            | 0,862 | 0,96      | 0,552 |
| 0,24           | 0,767 | 1,02      | 0,356 | 0,24            | 0,794 | 1,02      | 0,414 | 0,24            | 0,845 | 1,02      | 0,535 |
| 0,27           | 0,743 | 1,08      | 0,337 | 0,27            | 0,772 | 1,08      | 0,396 | 0,27            | 0,828 | 1,08      | 0,518 |
| 0,3            | 0,719 | 1,14      | 0,32  | 0,3             | 0,751 | 1,14      | 0,379 | 0,3             | 0,812 | 1,14      | 0,503 |
| 0,33           | 0,697 | 1,2       | 0,303 | 0,33            | 0,731 | 1,2       | 0,362 | 0,33            | 0,796 | 1,2       | 0,488 |
| 0,36           | 0,675 | 1,26      | 0,288 | 0,36            | 0,712 | 1,26      | 0,347 | 0,36            | 0,781 | 1,26      | 0,474 |
| 0,39           | 0,655 | 1,5       | 0,235 | 0,39            | 0,693 | 1,5       | 0,294 | 0,39            | 0,766 | 1,5       | 0,424 |
| 0,42           | 0,635 | 2         | 0,157 | 0,42            | 0,675 | 2         | 0,213 | 0,42            | 0,752 | 2         | 0,343 |
| 0,45           | 0,616 | 2,5       | 0,107 | 0,45            | 0,657 | 2,5       | 0,159 | 0,45            | 0,738 | 2,5       | 0,285 |
| 0,48           | 0,597 | 3         | 0,074 | 0,48            | 0,64  | 3         | 0,121 | 0,48            | 0,724 | 3         | 0,241 |
| 0,51           | 0,579 | 3,5       | 0,051 | 0,51            | 0,624 | 3,5       | 0,095 | 0,51            | 0,711 | 3,5       | 0,207 |
| 0,54           | 0,562 | 4         | 0,035 | 0,54            | 0,608 | 4         | 0,075 | 0,54            | 0,698 | 4         | 0,18  |

Таблица 16. Значения коэффициентов  $H(\infty, \tau_i) = H^*(\infty, \tau_i)$ , вычисленные для бетонного элемента по формуле, записанной во 2-й строке табл. 14

| $\tau_i$ , сут | $\Phi(\infty, 28)$ |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                | 0,5                | 1     | 1,5   | 2     | 2,1   | 2,5   | 3     | 3,5   | 4     |
| 28             | 0,636              | 0,437 | 0,318 | 0,242 | 0,23  | 0,19  | 0,154 | 0,127 | 0,107 |
| 45             | 0,664              | 0,473 | 0,355 | 0,278 | 0,266 | 0,224 | 0,185 | 0,157 | 0,134 |
| 65             | 0,691              | 0,51  | 0,394 | 0,316 | 0,304 | 0,261 | 0,22  | 0,189 | 0,165 |
| 90             | 0,718              | 0,547 | 0,435 | 0,357 | 0,344 | 0,3   | 0,258 | 0,225 | 0,199 |
| 120            | 0,742              | 0,581 | 0,472 | 0,395 | 0,383 | 0,338 | 0,299 | 0,26  | 0,233 |
| 180            | 0,771              | 0,623 | 0,521 | 0,445 | 0,434 | 0,389 | 0,345 | 0,309 | 0,28  |
| 360            | 0,796              | 0,661 | 0,565 | 0,493 | 0,481 | 0,437 | 0,393 | 0,356 | 0,326 |
| 1000           | 0,799              | 0,666 | 0,571 | 0,499 | 0,488 | 0,444 | 0,399 | 0,363 | 0,333 |

Вычисление напряжений при произвольном законе изменения вынужденных деформаций  $\varepsilon_0(t)$  с помощью коэффициентов  $H(t, \tau_i)$ . Согласно формулам (102) и (94), напряжения  $\sigma^*(t)$  связаны с вынужденными деформациями  $\varepsilon_0(t)$  зависимостью

$$\sigma^*(t) = -E(t) \left[ \varepsilon_0(t) - \int_{\tau_1}^t \varepsilon_0(\tau) R(t, \tau) d\tau \right]. \quad (124)$$

При плавных изменениях во времени состояния среды или тела практически всегда можно приближенно представить  $\varepsilon_0(t)$  в виде суммы стационарных вынужденных деформаций (рис. 28):

$$\varepsilon_0(t) = \Delta \varepsilon_0(\tau_1) + \Delta \varepsilon_0(\xi_1) + \dots + \Delta \varepsilon_0(\xi_n), \quad \xi_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}. \quad (125)$$

В этом случае интеграл, входящий в формулу (124), может быть приближенно записан как сумма произведений  $\Delta \varepsilon_0(t_i)$  и определенных интегралов от  $R(t, \tau)$  с верхними

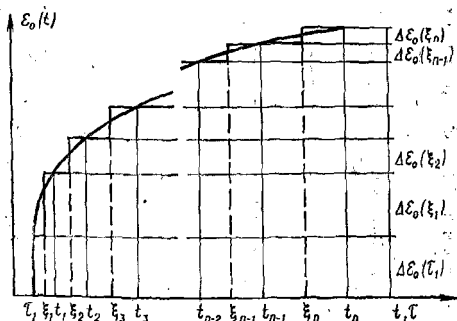


Рис. 28. Кривая изменения вынужденных деформаций  $\varepsilon_0(t)$

88 Таблица 17. Формулы для вычисления напряжений  $\sigma^*(t)$  при переменных вынужденных деформациях  $\varepsilon_0(t)$

| Номер строки   | Вынужденная деформация $\varepsilon_0(t)$   | Решение упругомгновенной задачи $\sigma(t)$                           | Решение с учетом ползучести $\sigma^*(t)$   |
|--|---|---|---|
| $C(t-\tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}], E(\tau) = E, \varphi = EC_0$ |   |   |   |
| 1  | $\varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} \sin \frac{\pi}{\bar{t}} t$ $\varepsilon_{00} = -\varepsilon_{01} \sin \frac{\pi}{\bar{t}} \tau_1$ | $-E (\varepsilon_{00} + \varepsilon_{01} \sin \frac{\pi}{\bar{t}} t)$ | $-E \left\{ \varepsilon_{00} \frac{1 + \varphi e^{-r(t-\tau_1)}}{1 + \varphi} + \varepsilon_{01} \left[ \sin \frac{\pi}{\bar{t}} t - \frac{\varphi}{1 + \varphi} \times \right. \right.$ $\times \left( \frac{\sin \frac{\pi}{\bar{t}} t - e^{-r(t-\tau_1)} \sin \frac{\pi}{\bar{t}} \tau_1}{1 + \left( \frac{\pi}{r\bar{t}} \right)^2} - \right.$ $\left. \left. \frac{\cos \frac{\pi}{\bar{t}} t - e^{-r(t-\tau_1)} \cos \frac{\pi}{\bar{t}} \tau_1}{\frac{r\bar{t}}{\pi} + \frac{\pi}{r\bar{t}}} \right) \right\}, \quad r = \gamma_1 (1 + c)$ |

Продолжение табл. 17

| Номер строки  | Вынужденная деформация $\varepsilon_0(t)$   | Решение упругомгновенной задачи $\sigma(t)$ | Решение с учетом ползучести $\sigma^*(t)$  |
|---|---|---|--|
| $C(t, \tau) = \theta(\xi) [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}], E(\tau) = E(1 - \beta e^{-\alpha\tau}), \varphi(\xi) = E\theta(\xi)$ |   |   |  |
| 2   | $\varepsilon_0(t) =$ $= \varepsilon_0 [1 - e^{-a(t-\tau_1)}],$ $\varepsilon_{(\infty)} = \varepsilon_0$ | $-E\varepsilon_0 [1 - e^{-a(t-\tau_1)}]$    | $-aE\varepsilon_0 \left\{ B_a(t) - \frac{\gamma_1 \varphi(\xi)}{a-r} [B_r(t) - B_a(t)] \right\},$ $B_x(t) = A_x(t) - \beta e^{-\alpha\tau_1} A_{x+\alpha}(t),$ $A_x(t) = \frac{1 - e^{-x(t-\tau_1)}}{x}, \quad A_{x+\alpha}(t) = \frac{1 - e^{-(x+\alpha)(t-\tau_1)}}{x+\alpha}$ $x = a, r, \quad r = \gamma_1 [1 + \varphi(\xi)]$ |

88 Примечание.  $\bar{t}$  — период функции;  $\theta(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$  — величины, средние в рассматриваемом промежутке времени  $t - \tau_1$ .

пределами  $t_n$  и нижними  $\xi_i$ , ( $\tau_i = t_0$ ). Это позволяет переписать формулу (124) так:

$$\begin{aligned} \sigma^*(t_n) = & -E(t_n) \left\{ \Delta \varepsilon_0(t_0) \left[ 1 - \int_{t_0}^{t_n} R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ & + \Delta \varepsilon_0(t_1) \left[ 1 - \int_{\xi_1}^{t_n} R(t, \tau) d\tau \right] + \\ & \left. + \dots + \Delta \varepsilon_0(t_n) \left[ 1 - \int_{\xi_n}^{t_n} R(t, \tau) d\tau \right] \right\} \end{aligned} \quad (126)$$

или в силу (96) и (104) в виде

$$\begin{aligned} \sigma^*(t_n) = \sum_{i=0}^{i=n} \Delta \sigma(t_i) H(t_n, \xi_i), \\ \tau_1 = \xi_0, \Delta \sigma(t_i) = -E(t_n) \Delta \varepsilon_0(t_i). \end{aligned} \quad (127)$$

При  $\varepsilon_0(t_0) = \Delta \varepsilon_0(t_1) = \dots = \Delta \varepsilon_0(t_n)$  из (126) следует зависимость

$$\sigma^*(t_n) = \sigma(t_n) H(t_n, \tau_1), \quad H(t_n, \tau_1) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{i=n} H(t_n, \xi_i), \quad (128)$$

в которой  $H(t_n, \tau_1)$  является коэффициентом уменьшения напряжений, вызванных переменными вынужденными деформациями.

Возможность суммирования составляющих напряжений (127) является следствием принципа наложения, использованного при выводе основных зависимостей теории [см. (72) ]. При расчете напряжений, формирующихся в бетонном элементе при  $t \rightarrow \infty$  и вызванных переменными вынужденными деформациями,  $H(\infty, \xi_i)$  могут приниматься по табл. 16 ( $\xi_i = \tau_i$ ,  $\xi_i \geq 28$  сут).

Если необходимо проследить изменение напряжений  $\sigma^*(t)$  в период времени от  $\tau_1$  до  $t_n$ , может быть использована формула

$$\vec{\sigma}^* = H \Delta \vec{\sigma}, \quad (129)$$

являющаяся следствием (127).

В эту формулу входят такие векторы и матрицы:

$$\vec{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma^*(t_0) \\ \sigma^*(t_1) \\ \dots \\ \sigma^*(t_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ H(t_1, t_0) H(t_1, \xi_1) \\ \dots \\ H(t_n, t_0) H(t_n, \xi_1) \dots H(t_n, \xi_n) \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \Delta \sigma(t_0) \\ \Delta \sigma(t_1) \\ \dots \\ \Delta \sigma(t_n) \end{pmatrix}, \quad t_0 = \tau_1. \quad (130)$$

Методика определения элементов  $\Delta \sigma$  ясна из рис. 28 и третьей формулы (127). Элементы матрицы  $\mathbf{H}$  вычисляются по формулам табл. 13 и 14 или по другим формулам подобного типа с предварительной заменой  $\tau_i$  на  $\xi_i$ . Недостаток описанного способа расчета связан с тем, что элементы вектора  $\vec{\sigma}^*$  вычисляются с различной точностью; точность увеличивается при увеличении  $i$  и наиболее высокая при  $i = n$ . Однако практика применения этого способа показывает, что при плавно изменяющихся вынужденных деформациях в стареющем материале всегда можно выбрать расположение точек  $t_1, t_2, t_3$ , при котором четвертый элемент вектора  $\vec{\sigma}^*$  вычисляется со степенью точности, приемлемой для технических расчетов.

Ниже приведена матрица коэффициентов  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$  для эталонного бетона, вычисленная по формуле 1-й строки табл. 14; при этом использовались данные (122), (123) и значение  $\varphi(\infty, 28) = C_9 E(28) = 6,36 \cdot 10^{-5} \cdot 3,30 \cdot 10^4 = 2,1$  [см. (28) и табл. 8], а также принималось  $\tau_1 = \xi_0 = 28$  сут,  $t_i = 45, 65, 90, 180, 360, 720$  и 1440 сут:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 0,812 & 0,910 \\ 0,655 & 0,740 & 0,903 \\ 0,520 & 0,588 & 0,716 & 0,891 \\ 0,302 & 0,334 & 0,402 & 0,487 & 0,731 \\ 0,212 & 0,234 & 0,279 & 0,327 & 0,426 & 0,641 \\ 0,200 & 0,222 & 0,264 & 0,309 & 0,391 & 0,469 & 0,543 \\ 0,200 & 0,222 & 0,264 & 0,309 & 0,391 & 0,467 & 0,487 & 0,494 \end{pmatrix} \quad (131)$$

Вычисление напряжений при произвольном законе изменения вынужденных деформаций. Построение вектора  $H^*$  с помощью матрицы  $R^*$ . Если при принятой аппроксимации для меры ползучести  $C(t, \tau)$  не удастся получить формулу для определения  $H(t, \tau_1)$ , приходится прибегать к приближенному вычислению интеграла, входящего в (105) [2]. Для этого удобно разбить рассматриваемый период времени  $\tau_1 - t_n$  на ряд промежутков  $t_{i-1} - t_i$  и считать, что внутри каждого промежутка напряжение упругомгновенной задачи изменяется линейно. Тогда интервал в пределах от  $\tau_1$  до  $t_n$  можно заменить суммой  $n$  интегралов с пределами  $t_{i-1} - t_i$ . Каждый из таких составляющих интегралов вычисляется как произведение площади, ограниченной  $R^*(t_n, \tau) - \omega_i$ , и ординаты напряжений упругомгновенной задачи  $\sigma(t)$ , расположенной под центром тяжести соответствующей фигуры  $\sigma(t_{i-1})k_{1i} + \sigma(t_i)k_{2i}$ . С учетом этого первая формула (105) принимает вид

$$\sigma^*(t_n) = \eta_{n0} \sigma(t_0) + \eta_{n1} \sigma(t_1) + \dots + \eta_{n(n-1)} \sigma(t_{n-1}) + \eta_{nn} \sigma(t_n), \quad (132)$$

причем

$$\begin{aligned} \eta_{n0} &= -\omega_1 k_{11}; \quad \eta_{n1} = -(\omega_1 k_{21} + \omega_2 k_{12}); \dots \\ \eta_{n(n-1)} &= -(\omega_{n-1} k_{2(n-1)} + \omega_n k_{1n}); \quad \eta_{nn} = 1 - \omega_n k_{2n}. \end{aligned} \quad (133)$$

Все ранее сказанное позволяет получить формулу, связывающую вектор напряжений  $\vec{\sigma}^*$  и вектор напряжений  $\vec{\sigma}$ , представляющий решение упругомгновенной задачи

$$\vec{\sigma}^* = R^* \vec{\sigma}, \quad (134)$$

где

$$R^* = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ \eta_{10} & \eta_{11} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \eta_{n0} & \eta_{n1} & \dots & \dots & \eta_{nn} & \end{vmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma(t_0) \\ \sigma(t_1) \\ \dots \\ \sigma(t_n) \end{vmatrix}. \quad (135)$$

Формула (134) позволяет вычислить с учетом ползучести и старения элементы вектора напряжений при произвольном законе изменения упругомгновенных напряжений (96), т. е. при любом характере развития вынужденных деформаций.

Если считать, что вынужденные деформации стационарны, то на основе (132), (96) и первой формулы (106) нетрудно получить зависимость для вычисления коэффициента

$$H^*(t_n, t_0) = \eta_{n0} + \eta_{n1} \frac{E(t_1)}{E(t_0)} + \dots + \eta_{nn} \frac{E(t_n)}{E(t_0)} \quad (136)$$

и вектора этих коэффициентов

$$\vec{H}^* = \mathbf{R}^* \frac{\vec{E}}{E_0} \quad (137)$$

В формуле (137) треугольная матрица  $\mathbf{R}^*$  строится согласно (135) и (133); векторы  $\vec{H}^*$  и  $\vec{E}/E_0$  в транспортированном виде показаны ниже:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}/E_0 &= \| 1, E(t_1)/E(t_0) \dots E(t_n)/E(t_0) \|; \\ \vec{H}^* &= \| 1, H^*(t_1, t_0) H^*(t_2, t_0) \dots H^*(t_n, t_0) \| \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

На рис. 29 показана кривая изменения коэффициента  $H^*(t, \tau_1)$ , построенная применительно к стержню, выполненному из эталонного бетона, но при  $\tau_1 = 7$  сут, а не  $\tau_1 = 28$  сут. Ординаты кривой  $H^*(t, 7)$  вычислялись по формуле (137) с предварительным составлением, согласно (118), таблиц  $R^*(t, \tau)$  типа табл. 18 (при  $t = 10, 14, 20, 28, 40, 60, 90$  сут, см. рис. 27) и использованием формул (133).

Весьма заманчивым представляется установление прямых зависимостей между компонентами ядра интегрального уравнения (97) —  $E(\tau_i)$  и  $\delta(t_n, \tau_i)$ , с одной стороны, и ко-

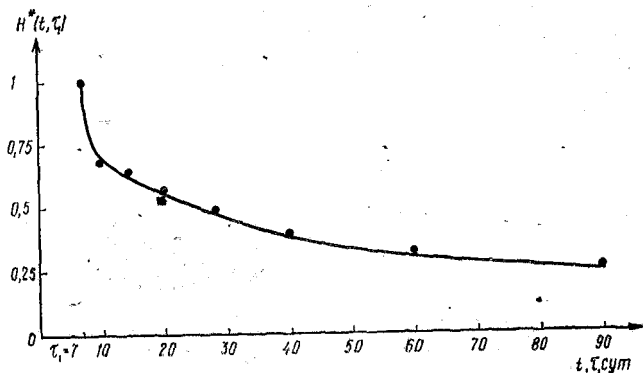


Рис. 29. Кривая коэффициента затухания напряжений  $H^*(t, \tau_1)$ , построенная с помощью формул (118), (133) и (137)



Таблица 18. Значения резольвенты  $R^*$  (60,  $\tau$ ), построенной применительно к эталонному бетону;  $\tau_1 = 7$  сут

| $\tau$ | $R^*$ (60, $\tau$ ) | $\tau$ | $R^*$ (60, $\tau$ ) | $\tau$  | $R^*$ (60, $\tau$ ) |
|--------|---------------------|--------|---------------------|---------|---------------------|
| 60     | 0,8238              | 50,52  | 0,014               | 25,1    | 0,013               |
| 59,95  | 0,6194              | 49,67  | 0,014               | 24,25   | 0,0129              |
| 59,9   | 0,4665              | 48,83  | 0,014               | 23,4    | 0,0128              |
| 59,85  | 0,3522              | 47,98  | 0,014               | 22,55   | 0,0128              |
| 59,8   | 0,2667              | 47,13  | 0,0139              | 210,1   | 0,0127              |
| 59,75  | 0,2028              | 46,28  | 0,0139              | 20,86   | 0,0126              |
| 59,7   | 0,155               | 45,44  | 0,0139              | 20,01   | 0,0125              |
| 59,65  | 0,1192              | 44,59  | 0,0139              | 19,16   | 0,0125              |
| 59,6   | 0,0925              | 43,74  | 0,0139              | 18,32   | 0,0124              |
| 59,55  | 0,0725              | 42,89  | 0,0138              | 17,47   | 0,0123              |
| 59,5   | 0,0575              | 42,05  | 0,0138              | 16,62   | 0,0122              |
| 59,45  | 0,0463              | 41,2   | 0,0138              | 15,77   | 0,0121              |
| 59,4   | 0,038               | 40,35  | 0,0138              | 14,93   | 0,012               |
| 59,35  | 0,0317              | 39,5   | 0,0137              | 14,08   | 0,0119              |
| 59,3   | 0,027               | 38,66  | 0,0137              | 13,23   | 0,0118              |
| 59,25  | 0,0235              | 37,81  | 0,0137              | 12,38   | 0,0117              |
| 59,2   | 0,0209              | 36,96  | 0,0137              | 11,54   | 0,0116              |
| 59,15  | 0,019               | 36,11  | 0,0136              | 10,69   | 0,0115              |
| 59,1   | 0,0175              | 35,27  | 0,0136              | 9       | 0,0114              |
| 59,05  | 0,0164              | 34,42  | 0,0135              | 9       | 0,0113              |
| 59     | 0,0156              | 33,57  | 0,0135              | 8,9     | 0,0107              |
| 58,15  | 0,0141              | 32,72  | 0,0135              | 8,8     | 0,0104              |
| 57,3   | 0,0141              | 31,88  | 0,0134              | 8,7     | 0,0102              |
| 56,45  | 0,0141              | 31,03  | 0,0134              | 8,6     | 0,0101              |
| 55,61  | 0,0141              | 30,18  | 0,0133              | 8,5     | 0,0101              |
| 54,76  | 0,0141              | 29,33  | 0,0133              | 8,4—7,9 | 0,01                |
| 53,91  | 0,014               | 28,49  | 0,0132              | 7,8—7   | 0,0099              |
| 53,06  | 0,014               | 27,64  | 0,0032              |         |                     |
| 52,22  | 0,014               | 26,79  | 0,0131              |         |                     |
| 51,37  | 0,014               | 25,94  | 0,013               |         |                     |

эффицентами  $\eta_{ni}$  — с другой. Такие зависимости можно получить, если дискретизовать задачу на уровне решения уравнения (97).

В связи с этим полезно заметить, что численные способы решения основаны, по сути дела, на возможности приближенного представления интегрального уравнения Вольterra второго рода в виде системы алгебраических уравнений. В линейной теории ползучести можно выделить два направления в построении таких решений, несколько отличающихся друг от друга. Первое основано на том, что если процесс описывается интегральным уравнением вида (97), то его можно приближенно описать и системой алгебраичес-

ких уравнений, т. е. можно обойтись без интегрального представления. Г. Н. Маслов [65] записал систему алгебраических уравнений, последовательное решение которых позволяет проследить процессы изменения термонапряженного состояния бетонного тела, происходящие вследствие ползучести. В дальнейшем была сделана попытка использовать подобную методику применительно к выполнению расчетов в матричной форме с выходом на ЭВМ [80]. Несравненно большее применение в наследственной теории старения нашло второе направление, основанное на решении интегрального уравнения (97) путем сведения его к системе алгебраических уравнений [94, 128]. Далее, в целях сокращения записей, используем такое обозначение оператора, стоящего в левой части уравнения (97):

$$\sigma^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = (1 - kE) \sigma^*. \quad (139)$$

Если рассматриваемый период времени от  $\tau_1 = t_0$  до  $t_n$  (139) разбить на  $n$  промежутков и представить интеграл, входящий в (139), в виде суммы  $n$  интегралов

$$\int_{\tau_1}^{t_n} \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{t_1} \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

то путем простейших преобразований можно доказать справедливость равенства [94]

$$\overrightarrow{(1 - Ek) \sigma_i^*} = \Delta \delta \vec{\sigma}_i^*. \quad (140)$$

Это равенство связывает вектор функции, получающейся после применения к  $\sigma^*(t)$  оператора, стоящего в левой части уравнения (97), и произведение треугольной матрицы характеристик деформативности и вектора напряжений:

$$\Delta \delta = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ \Delta_{10} & \Delta_{11} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n0} & \Delta_{n1} & \dots & \Delta_{nn} & \end{vmatrix}; \quad \vec{\sigma}_i^* = \begin{vmatrix} \sigma^*(\tau_1) \\ \sigma^*(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma^*(t_n) \end{vmatrix}. \quad (141)$$

Элементы матрицы (141) связаны с интегралами, вычисленными для отдельных промежутков времени. В частности, интегрирование по частям и использование теоремы о среднем приводит к формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{i0} &= E(t_i) [\delta(t_i, \tau_1) - \delta(t_i, \xi)_{\tau_1}^{t_1}], \quad i=1, 2, \dots, n; \\ \Delta_{ik} &= E(t_i) [\delta(t_i, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k} - \delta(t_i, \xi)_{t_k}^{t_{k+1}}]; \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n, \quad i \neq k, \quad t_0 = \tau_i; \\ \Delta_{ik} &= E(t_i) \delta(t_i, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad i=k. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Здесь  $\delta(t_i, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k}$  — значения полной относительной деформации (22), средние в смысле удовлетворения равенства

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d\sigma^*(\tau)}{d\tau} \delta(t_i, \tau) d\tau = [\sigma^*(t_k) - \sigma^*(t_{k-1})] \delta(t_i, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k}. \quad (143)$$

При выполнении практических расчетов заранее неизвестны значения  $\delta(t_n, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k}$ , средние в смысле удовлетворения этого равенства, и приходится принимать приближенные значения, например

$$\delta_n(t_n, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k} = \delta\left(t_n, \frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right). \quad (144)$$

При рассмотрении напряженного состояния интенсивно стареющего материала и применении аппроксимаций типа (42), т. е. аппроксимаций, при которых функция  $L^*(t, \tau)$  имеет как вялые, так и весьма активные участки, использование формул (142) и (144) в некоторых случаях приводит к достаточно точным результатам только при относительно высоких порядках матриц  $\Delta\delta$ . Для уменьшения порядка матриц эффективен прием, разработанный автором совместно с Ю. Н. Хлоповским и основанный на раздельном учете вялой и активной составляющих производной  $\delta(t, \tau)$  по  $\tau$ , т. е.  $\delta'(t, \tau)$ . Упомянутая активная составляющая для обычных тяжелых бетонов заметно отлична от нуля только на протяжении  $T = 1 - 1,5$  сут перед моментом отсчета  $t_n$ . Если полагать, что  $t_n - (t_{n-1} - T)$  значительно больше  $T$ , в промежутке времени  $t_n - T \leq \tau \leq t_n$  принять аппроксимацию

$$\delta'(T, \tau) = \delta'(t_k, t_n - T) + [\delta'(t_k, t_n) - \delta'(t_k, t_n - T)] e^{-\alpha(T-\tau)}$$

и считать, что на всех остальных промежутках времени, включая  $t_{n-1} - (t_n - T)$ , функция  $\delta'(t, \tau)$  аппроксимирована прямыми, то можно получить такие формулы для элементов матрицы  $\Delta\delta$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i0} &= -\frac{E(t_i)}{6} (t_1 - t_0) \{2\delta'(t_i, t_0) + [(1 - 6K_{2i}) \times \\
 &\quad \times \delta'(t_i, t_1 - T) + 6K_{2i} \delta'(t_i, t_1)]\}; \\
 \Delta_{i0} &= -\frac{E(t_i)}{6} (t_1 - t_0) [2\delta'(t_i, t_0) + \delta'(t_i, t_1)], \\
 &\quad i = 2, 3, \dots, n; \\
 \Delta_{ik} &= -\frac{6E(t_i)}{6} [(t_k - t_{k-1}) \delta'(t_i, t_{k-1}) + \\
 &\quad + 2(t_{k+1} - t_{k-1}) \delta'(t_i, t_k) + (t_{k+1} - t_k) \delta'(t_i, t_{k+1})]; \\
 &\quad i = 3, 4, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n-2; i \neq k; \\
 \Delta_{ik} &= 1 - \frac{E(t_i)}{6} (t_i - t_{i-1}) \{\delta'(t_i, t_{i-1}) + \\
 &\quad + [2 - 6(K_{1i} - K_{2i})] \delta'(t_i, t_i - T) + 6(K_{1i} - K_{2i}) \times \\
 &\quad \times \delta'(t_i, t_i)\}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; i = k; \\
 \Delta_{ik} &= -\frac{E(t_i)}{6} \{(t_k - t_{k-1}) \delta'(t_i, t_{k-1}) + \\
 &\quad + 2(t_{k+1} - t_{k-1}) \delta'(t_i, t_k) + (t_{k+1} - t_k) \times \\
 &\quad \times [(1 - 6K_{2i}) \delta'(t_i, t_i - T) + 6K_{2i} \delta'(t_i, t_i)]\}, \\
 &\quad i = 2, 3, \dots, n, k = i - 1; \\
 K_{1i} &= \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha(t_i - t_{i-1})}, \quad K_{2i} = \frac{1 - e^{-\alpha T}(1 + \alpha T)}{\alpha^2(t_i - t_{i-1})^2}, i = k.
 \end{aligned} \tag{145}$$

Если записать уравнение (97) применительно к определению неизвестного  $\sigma^*(t_i)$  в моменты времени  $\tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$ , т. е. записать ряд уравнений и заменить вектор левых частей этих уравнений с помощью (140), получим матричное уравнение

$$\Delta\delta\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma},$$

содержащее в правой части вектор напряжений упругомгновенной задачи  $\vec{\sigma}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$\vec{\sigma}^* = \Delta\delta^{-1}\vec{\sigma}, \tag{146}$$

Влияние ползучести и старения на напряженное состояние бетонных, жестко заделанных по концам, стержней при вынужденных деформациях типа температурных деформаций, вызванных экзотермией цемента, экспериментально изучалось в Одесском инженерно-строительном институте [85]. Стержни цилиндрической формы диаметром 70 мм длиной 700 мм были изготовлены из бетона состава 1:2:4, по массе на портландцементе при  $V/C = 0,5$  и покрыты гидроизоляцией. Напряженное состояние стержня, вызванное температурными деформациями, соответствующими разогреву бетона от экзотермии цемента в адиабатических условиях, приближенно моделировалось созданием деформаций с помощью рычажных приборов и соответствующим изменением сжимающих усилий. Всего было проведено три серии испытаний (по три стержня в каждой серии). На рис. 31 показана усредненная кривая, построенная по результатам испытаний всех девяти стержней [85].

Параллельно с загрузением стержней, соответствующим переменным вынужденным деформациям, исследовали ползучесть образцов-близнецов при постоянных нагрузках прикладываемых в возрасте бетона  $\tau_1 = 1, 2, 3, 5$  и 7 дней, и определяли изменение модуля упругомгновенных деформаций. Из рисунка следует, что результаты расчетов вполне удовлетворительно соответствуют опытным данным. Средняя предельная характеристика ползучести бетона при сжатии принята равной  $\varphi(\xi) = \varphi(3)$ .

Экспериментальные исследования поведения бетонного бруса с поперечным сечением  $50 \times 50$  см и длиной 210 см

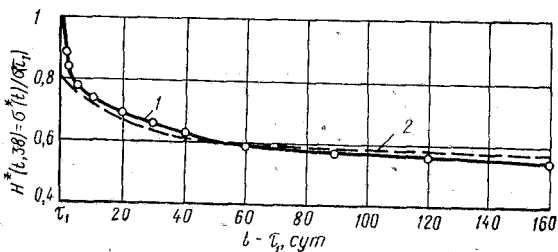


Рис. 30. Изменение коэффициента затухания напряжений (коэффициента релаксации)  $H^*(t, 38) = \sigma^*(t)/\sigma(\tau_1)$  в сжатом бетонном образце ( $\tau_1$  — время с момента обжатия образцов)

1 — экспериментальная кривая; 2 — кривая, построенная по формуле 2-й строки табл. 14

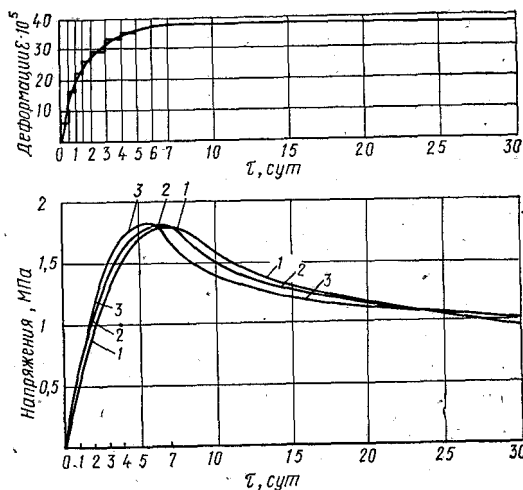


Рис. 31. Кривые изменения напряжений в бетонном брусе  $\sigma^*(t)$  при переменных вынужденных деформациях  $\varepsilon_0(t)$  и полных деформациях  $\varepsilon^*(t) = 0$

1 — усредненная экспериментальная; 2 — по результатам численного расчета; 3 — по формуле 2-й строки табл. 17 (при  $\tau_1 = 0, \beta = 0$ )

при температурных и силовых воздействиях, обеспечивающих условия деформирования, близкие к условиям, соответствующим полному защемлению, выполнены в НИС Гидропроекта им. С. Я. Жука [5]. Переменный во времени температурный режим, моделирующий период экзотермического разогрева бетона до  $15^\circ \text{C}$  в течение первых 7 сут после укладки и последующий период охлаждения со скоростью около  $1^\circ \text{C}$  в сутки, создавался с помощью специальной системы. Начиная с возраста бетона 0,75—1 сут деформация средней по длине зоны бруса поддерживалась примерно постоянной. На рис. 32 изображена кривая изменения напряжений в брусе, полученная путем замера усилий в связях, обеспечивающих заданный характер деформирования.

Одновременно с опытами на образцах-близнецах, сжатых усилиями, соответствующими  $\sigma = 0,4R_{\text{пр}}$ , изучались деформативные свойства бетона. Поскольку при переменных деформациях сжимающие напряжения в бетоне не превышали  $0,2R_{\text{пр}}$ , в силу некоторой нелинейности была проведена корректировка значений простой ползучести.

Напряжения определяли с помощью решения уравнения (97) численным способом [128]. При этом в силу отсутствия

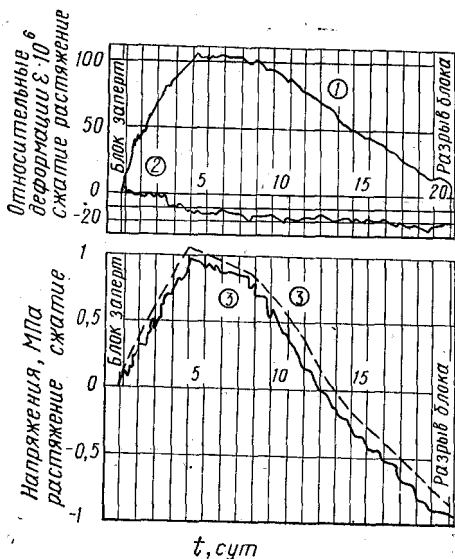


Рис. 32. Напряжения  $\sigma^*(t)$  в заземленном тонком брусе при постоянной температуре: 1 — деформации свободного бруса  $\varepsilon_0(t)$ ; 2 — деформации заземленного бруса; 3 — напряжения  $\sigma^*(t)$ ; — — — эксперимент; — — — расчет

полного заземления вынужденные деформации  $\varepsilon^*(t)$  принимали равными разности между деформациями, замеряемыми на свободном образце-близнеце, и деформациями заземленного бруса. Кривые на рис. 32 показывают соответствие между экспериментальными и теоретическими данными.

На основании приведенных сопоставлений можно сделать вывод, что процесс релаксации в условно-линейной области ползучести вполне приемлемо описывается линейной наследственной теорией старения. Очевидно также, что эта теория достаточно полно учитывает особенности напряженно-деформированного состояния и при медленном монотонном возрастании напряжений, и таком же возрастании последующим убыванием.

## 8. ЗАВИСИМОСТИ И УРАВНЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Если на однородное изотропное тело, обладающее линейной ползучестью, с момента  $\tau_1$  действуют внешние силы, приложенные к поверхности и объему и представленные проекциями векторов  $\bar{X}(t)$ ,  $\bar{Y}(t)$ ,  $\bar{Z}(t)$  и  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ ,

Кже вынужденные деформации  $\varepsilon_{x_0}(t)$ ,  $\varepsilon_{y_0}(t)$  и  $\varepsilon_{z_0}(t)$ , учитывая формулы (74) и (83), а также применимость принципа наложения к поперечным деформациям, можно записать зависимости

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\sigma_x^*(t) [1 + \nu_1(t)] - \nu_1(t) s^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \times \right. \\ &\times [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] - s^*(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \left. \right\} d\tau + \varepsilon_{x_0}(t); \\ \gamma_{xy}^*(t) &= 2 \left\{ \frac{[1 + \nu_1(t)] \tau_{xy}^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{xy}^*(\tau) \times \right. \\ &\times \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] \left. \right\} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

причем

$$s^*(t) = \sigma_x^*(t) + \sigma_y^*(t) + \sigma_z^*(t). \quad (152)$$

Формулы для  $\varepsilon_y^*(t)$ ,  $\varepsilon_z^*(t)$ ,  $\gamma_{xz}^*(t)$  и  $\gamma_{yz}^*(t)$  следуют из (151) после соответствующих перестановок индексов при напряжениях.

При  $\tau_1 = t$  зависимости (151) приводят к известным формулам упругомгновенной задачи

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= \frac{\sigma_x(t) [1 + \nu_1(t)] - \nu_1(t) s(t)}{E(t)} + \varepsilon_{x_0}(t); \\ s(t) &= \sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t); \\ \gamma_{xy}(t) &= 2 \frac{[1 + \nu_1(t)] \tau_{xy}(t)}{E(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Считается, что внешние поверхностные и объемные силы, вынужденные деформации, а также напряжения, деформации и перемещения в теле являются функциями не только времени  $t$ , но и геометрических координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в формулах (151)–(153) и далее не написаны для сокращения записи.

Рассматривается тело, удовлетворяющее гипотезам сплошности, т. е. тело, для которого справедливы известные зависимости между деформациями и перемещениями  $u^*(t)$ ,  $v^*(t)$ ,  $w^*(t)$ ,

$$\varepsilon_x^*(t) = \frac{\partial u^*(t)}{\partial x}, \dots, \gamma_{xy}^*(t) = \frac{\partial u^*(t)}{\partial y} + \frac{\partial v^*(t)}{\partial x} \quad (154)$$



Первая из этих формул и первая формула (151) позволяют записать выражение для определения перемещения  $u^*(t)$

$$u^*(t) = \frac{1}{E(t)} \int \{ [1 + v_1(t)] \sigma_x^*(t) - v_1(t) s^*(t) \} dx - \int_{\tau_1}^t \int \left\{ \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] - s^*(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} dx d\tau + u_0(t), \quad (155)$$

где  $u_0(t)$  — перемещение, вызванное вынужденными деформациями (вынужденное перемещение).

Формулы для  $v^*(t)$  и  $w^*(t)$  получаются из (155) заменой индексов  $x$  соответственно на  $y$  и  $z$ . При  $\tau_1 = t$  зависимость (155) сводится к формуле упругомгновенной задачи

$$u(t) = \frac{1}{E(t)} \int \{ \sigma_x(t) [1 + v_1(t)] - v_1(t) s^*(t) \} dx + u_0(t). \quad (156)$$

Из (154) следуют уравнения совместности деформаций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x^*(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^*(t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^*(t)}{\partial x \partial y}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x^*(t)}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}^*(t)}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}^*(t)}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}^*(t)}{\partial z} \right); \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

В дополнение к уже записанным уравнениям и зависимостям используются уравнения равновесия элементарного параллелепипеда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*(t)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*(t)}{\partial z} + X(t) &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}^*(t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*(t)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*(t)}{\partial z} + Y(t) &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}^*(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*(t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*(t)}{\partial z} + Z(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Условия на поверхности, заданные в напряжениях, как и для тела, обладающего только упругими свойствами, формулируются в виде условий равновесия тетраэдра. Например,

$$\bar{X}(t) = \sigma_{xk}^*(t) \cos(nx) + \tau_{xy_h}^*(t) \cos(ny) + \tau_{yz_h}^*(t) \cos(nz). \quad (159)$$

Индексы  $k$  показывают, что речь идет о напряжениях у поверхности тела;  $n$  — нормаль к поверхности. Для записи условий на поверхности в перемещениях используются зависимости вида (155). Например, условие наличия перемещения поверхности тела в направлении  $x$  может быть представлено так:

$$u_k^*(t) = \frac{1}{E(t)} \int \{ [1 + v_1(t)] \sigma_{xk}^*(t) - v_1(t) s_k^*(t) \} dx - \\ - \int_{\tau_1}^t \int \left\{ \sigma_{xk}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \right. \\ \left. + s_k^*(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} dx d\tau + u_{OK}(t), \quad (160)$$

где

$$s_k^*(t) = \sigma_{xk}^*(t) + \sigma_{yk}^*(t) + \sigma_{zk}^*(t). \quad (161)$$

Для упругомгновенной задачи, т. е. при  $\tau_1 = t$  это условие принимает вид

$$u_k(t) = \frac{1}{E(t)} \int \{ [1 + v_1(t)] \sigma_{xk}(t) - v_1(t) s_k(t) \} dx + u_{OK}(t), \quad (162)$$

причем

$$s_k(t) = \sigma_{xk}(t) + \sigma_{yk}(t) + \sigma_{zk}(t). \quad (163)$$

Уравнения совместности деформаций (157) и уравнения равновесия (158) при физических зависимостях (151) позволяют построить решение в напряжениях задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого тела, обладающего линейной ползучестью [7]. Такое решение обычно и применяется. Для построения решения в перемещениях необходимо вместо (151) использовать физические зависимости типа (102), т. е. зависимости, выражающие напряжения через деформации с помощью резольвенты.

## ГЛАВА IV

### ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

#### 1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО СПЛОШНОГО ТЕЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНИХ СИЛ И НАЛИЧИИ ВЫНУЖДЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Уравнения состояния. Влияние ползучести на напряжения, деформации и перемещения. Как уже упоминалось, с точки зрения экспериментального обеспечения, решение рассматриваемой задачи удобнее строить в напряжениях. Для записи уравнений состояния могут быть использованы уравнения равновесия (158), условия совместности деформаций (157) и физические зависимости (151).

Подстановка в (157) значений деформаций согласно (151) и использование уравнений равновесия позволяют для случая объемных сил, не зависящих от координат, получить такую систему уравнения совместности деформаций в напряжениях [7]:

$$\begin{aligned}
 & [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_x^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x^2} - E(t) \times \\
 & \times \int_{\tau_1}^t \left\{ \nabla^2 \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 s^*(\tau)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = \Omega_x(t); \quad (164)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \tau_{xy}^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x \partial y} - E(t) \int_{\tau_1}^t \left\{ \nabla^2 \tau_{xy}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \times \right. \\
 & \times [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \left. \frac{\partial^2 s^*(\tau)}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = \Omega_{xy}(t), \quad (x, y, z),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Omega_x(t) = & -\frac{E(t)}{1 - \nu_1(t)} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_{x0}(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y0}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{x0}(t)}{\partial z^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z0}(t)}{\partial x^2} + \nu_1(t) \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{y0}(t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z0}(t)}{\partial y^2} \right] \right\}; \quad (165)
 \end{aligned}$$

$$\Omega_{xy}(t) = \frac{E(t)}{1 - \nu_1(t)} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{x0}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y0}(t)}{\partial y^2} + \nu_1(t) \frac{\partial^2 \varepsilon_{z0}(t)}{\partial z^2} \right].$$

При  $\tau_1 = t$  система уравнения (164) позволяет получить решение упругомгновенной задачи

$$\left. \begin{aligned} [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_x(t) + \frac{\partial^2 s(t)}{\partial x^2} &= \Omega_x(t); \\ [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \tau_{xy}(t) + \frac{\partial^2 s(t)}{\partial x \partial y} &= \Omega_{xy}(t) (x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Учитывая равенства правых частей уравнений (164) и (166), уравнения (164) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_x^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x^2} - \\ & - E(t) \int_{\tau_1}^t \left\{ \nabla^2 \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 s^*(\tau)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \sigma_x(t) + \frac{\partial^2 s(t)}{\partial x^2}; \quad (167) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \tau_{xy}^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x \partial y} - E(t) \int_{\tau_1}^t \left\{ \nabla^2 \tau_{xy}^*(\tau) \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] + \left. \frac{\partial^2 s^*(\tau)}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = \\ & = [1 + \nu_1(t)] \nabla^2 \tau_{xy}(t) + \frac{\partial^2 s(t)}{\partial x \partial y}, \quad (x, y, z), \end{aligned}$$

где  $s^*(t)$  и  $s(t)$  — см. (152) и (153).

Полученные системы (164) и (167) состоят из шести интегро-дифференциальных уравнений и связывают шесть компонентов тензора напряжений с вынужденными деформациями; поверхностные силы входят в решение через условия на контуре (159).

Описание напряженного состояния существенно упрощается, если выполняются условия (64). Рассмотрим сначала напряженное состояние, вызванное только внешними силами, действующими на поверхности тела [ $\Omega_x(t) = 0 \dots \Omega_{xy}(t) = 0 \dots$ ]. В этом случае при (64) система уравнений (164) распадается на шесть отдельных уравнений, каждое

из которых является линейным однородным интегральным уравнением Вольтерра второго рода,

$$\left. \begin{aligned} F_x^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t F_x^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau &= 0; \\ F_{xy}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t F_{xy}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

(x, y, z)

и позволяет разыскать функции вида

$$\begin{aligned} F_x^*(t) &= (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x^2}; \\ F_{xy}^*(t) &= (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy}^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Известно, что уравнения (168) не имеют решений, отличных от тождественного нуля, что эквивалентно наличию соотношений

$$\left. \begin{aligned} [1 + \nu] \nabla^2 \sigma_x^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x^2} &= 0; \\ [1 + \nu] \nabla^2 \tau_{xy}^*(t) + \frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

совпадающих с уравнениями совместности деформаций упругомгновенной задачи (166) для рассматриваемого случая.

Таким образом, наличие линейной ползучести не влияет на уравнения состояния упругого тела, вызванного действием внешних сил, если выполняются равенства (64). Но напряжения в теле определяются не только уравнениями состояния, но и условиями на поверхности, записываемыми в виде дополнительных уравнений. Идентичность таких уравнений при решении задачи с учетом ползучести и решении упругомгновенной задачи может трактоваться как отсутствие дополнительного влияния ползучести через условия на контуре. В дальнейшем для краткости будем называть такие условия не зависящими от ползучести.

Все сказанное позволило сформулировать первую основную теорему линейной теории ползучести:

*если напряженное состояние упругого тела, обладающего линейной ползучестью, вызвано внешними силами, выполняются равенства (64) и условия на поверхности не зависят от ползучести, то система напряжений в таком теле тож-*

дественно совпадает с системой напряжений соответствующей упругомгновенной задачи, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^*(t) &= \sigma_x(t); \quad \sigma_y^*(t) = \sigma_y(t); \quad \sigma_z^*(t) = \sigma_z(t); \\ \tau_{xy}^*(t) &= \tau_{xy}(t); \quad \tau_{xz}^*(t) = \tau_{xz}(t); \quad \tau_{yz}^*(t) = \tau_{yz}(t). \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Следовательно, в данном случае ползучесть влияет только на деформации и перемещения. Сравнение (151) и (153) показывает, что при условиях (170) первые слагаемые формул (151) являются упругомгновенными деформациями; во вторых слагаемых, в силу (170) и (64), множители при производной  $\delta(t, \tau)$  представляют произведения  $E(\tau)$  и упругомгновенные деформации в момент времени  $\tau$ .

Сказанное открывает возможность для формулировки следующего положения, являющегося следствием первой основной теоремы линейной теории ползучести.

Если напряженное состояние упругого тела, обладающего линейной ползучестью, вызвано внешними силами и выполняются равенства (64), то деформации в таком теле связаны с соответствующими деформациями упругомгновенной задачи зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \varepsilon_x(t) - \int_{\tau_1}^t \varepsilon_x(\tau) E(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \\ \gamma_{xy}^*(t) &= \gamma_{xy}(t) - \int_{\tau_1}^t \gamma_{xy}(\tau) E(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Полные перемещения в этом случае тоже выражаются через перемещения упругомгновенной задачи, например

$$u^*(t) = u(t) - \int_{\tau_1}^t u(\tau) E(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (172)$$

При напряженном состоянии, вызванном только вынужденными деформациями [ $\bar{X}(t) = 0$ ,  $\bar{Y}(t) = 0$ ,  $\bar{Z}(t) = 0$ ], просуммировав первые три уравнения (167) и учтя значения  $s^*$  и  $s$  (см. п. 8 гл. III), найдем

$$\begin{aligned} \nabla^2 s^*(t) - \frac{E(t)}{2 + \nu_1(t)} \int_{\tau_1}^t \nabla^2 s^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \times \\ \times [2\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] d\tau = \nabla^2 s_2^*(t). \end{aligned} \quad (173)$$

Из (173) следует интегральное уравнение

$$s^*(t) - \frac{E(t)}{2 + \nu_1(t)} \int_{\tau_1}^t s^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [2\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] d\tau = s(t) + \bar{s}(t). \quad (174)$$

В полученном уравнении  $\bar{s}(t)$  — неизвестная функция, удовлетворяющая однородному гармоническому уравнению

$$\nabla^2 \bar{s}(t) = 0. \quad (175)$$

Интегральное уравнение (174) без функции  $\bar{s}(t)$  не содержит произвольных функций, необходимых для учета на поверхности специфики влияния ползучести; функция  $\bar{s}(t)$  позволяет ввести такую специфику.

В случае выполнения равенств (64) уравнение (174) принимает вид

$$s^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t s^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = s(t) + \bar{s}(t). \quad (176)$$

При условиях на контуре, не зависящих от ползучести, функция  $s^*(t)$  представляет напряженное состояние как внутри тела, так и на его поверхности; функция  $\bar{s}(t)$  на поверхности должна принимать нулевые значения. Сказанное и однородность (175) требуют выполнения условия

$$\bar{s}(t) \equiv 0. \quad (177)$$

Учитывая это, из (176) можно получить уравнение

$$s^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t s^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = s(t), \quad (178)$$

а затем и соотношение

$$\frac{\partial^2 s^*(t)}{\partial x^2} - E(t) \int_{\tau_1}^t \frac{\partial^2 s^*(\tau)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial^2 s(t)}{\partial x^2}, \quad (179)$$

позволяющее привести первое интегро-дифференциальное уравнение системы (167) к виду

$$\nabla^2 \sigma_x^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \sigma_x^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \nabla^2 \sigma(t) \quad (180)$$





На основании (185) и уравнения (178) нетрудно показать, что при выполнении условий (64) первая зависимость (151) принимает вид

$$\varepsilon_x^*(t) = \frac{\sigma_x(t)(1+\nu) - \nu s(t)}{E(t)} + \varepsilon_{x0}(t), \quad (186)$$

что в силу (153) эквивалентно равенству

$$\varepsilon_x^*(t) = \varepsilon_x(t).$$

Аналогичные равенства можно получить и для всех остальных деформаций. Этот результат удобно сформулировать в виде следствия из второй основной теоремы линейной теории ползучести:

если напряженное состояние упругого тела, обладающего линейной ползучестью, вызвано вынужденными деформациями, выполняются равенства (64) и условия на поверхности не зависят от ползучести, то компоненты деформации в таком теле тождественно совпадают с компонентами деформаций упругомгновенной задачи, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \varepsilon_x(t), \quad \varepsilon_y^*(t) = \varepsilon_y(t), \quad \varepsilon_z^*(t) = \varepsilon_z(t); \\ \gamma_{xy}^*(t) &= \gamma_{xy}(t), \quad \gamma_{xz}^*(t) = \gamma_{xz}(t), \quad \gamma_{yz}^*(t) = \gamma_{yz}(t). \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

При этом ползучесть не влияет на значения перемещений тела, т. е. выполняются равенства

$$u^*(t) = u(t), \quad v^*(t) = v(t), \quad w^*(t) = w(t). \quad (188)$$

Теоремы о влиянии линейной ползучести на напряженные состояния тел, вызванные внешними нагрузками и вынужденными деформациями, обычно называют теоремами Н. Х. Арутюняна, впервые доказавшего их для случая, когда условия на контуре заданы в напряжениях [7]. Впоследствии было установлено, что теоремы справедливы и при закреплении жесткими связями поверхности тела или ее части [85] (см. также [1, 113, 121]).

Поскольку рассмотренное решение основано на принципе наложения, то при одновременном действии внешних сил и наличии вынужденных деформаций напряженное состояние упругого тела, обладающего ползучестью, представляется в виде суммы напряженных состояний, определяемых от каждого из этих факторов отдельно на основании теорем Н. Х. Арутюняна.

Теоремы Н. Х. Арутюняна имеют весьма существенное практическое значение, так как позволяют достаточно просто учитывать влияние линейной ползучести на напряженное

состояние упругого изотропного однородного сплошного тела. При этом открываются широкие возможности для использования известных решений теории упругости.

**Условия на поверхности.** Условия на поверхности не зависят от ползучести в случаях:

1) когда они заданы в напряжениях, т. е. когда они записываются как условия равновесия тетраэдра (159);

2) если на поверхность контура наложены абсолютно жесткие связи, т. е. если

$$u_k^*(t) = 0, v_k^*(t) = 0, w_k^*(t) = 0 \quad (189)$$

и выполняются условия (64);

3) в смешанном случае, включающем 1-й и 2-й случаи. Независимость от ползучести условий (159) совершенно очевидна, поскольку они сформулированы как условия равновесия.

При наложении на поверхность тела податливых связей, препятствующих перемещениям, например в направлении  $x$ , должно выполняться условие

$$u_k^*(t) = u_c^*(t), \quad (190)$$

где  $u_c^*(t)$  — перемещения связей.

Если связи изготовлены из материала, обладающего как упругими свойствами, так и линейной ползучестью, и выполнены в виде отдельных стерженьков, шарнирно-прикрепленных к телу и к неподвижным опорам, то перемещение  $u_c^*(t)$  может быть представлено в виде

$$u_c^*(t) = \frac{l_c}{F_c} \left[ \frac{\sigma_{xk}^*(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_{xk}^*(\tau) \frac{\partial \delta_c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right], \quad (191)$$

где  $l_c$  и  $F_c$  — длина и площадь поперечного сечения стерженьков, расположенных на площади поверхности тела, равной единице;  $E_c(t)$  и  $\delta_c(t, \tau)$  — характеристики упругих свойств и ползучести стерженьков.

С помощью формул (160), (64) и (191) условие (190) может быть представлено в виде интегрального уравнения

$$S_{xk}^*(t) - \frac{l_c E(t)}{F_c E_c(t)} \sigma_{xk}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \left[ S_{xk}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} - \frac{l_c}{F_c} \sigma_{xk}^*(\tau) \frac{\partial \delta_c(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau = -E(t) u_{0k}(t), \quad (192)$$

где

$$S_{xK}^*(t) = \int [(1 + \nu)\sigma_{xK}^*(t) - \nu S_K^*(t)] dx.$$

При абсолютно жестких связях [ $E_c(\tau) = \infty$ ,  $\delta_c(t, \tau) = \infty$ ] это уравнение приводится к виду

$$S_{xK}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t S_{xK}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -E(t) u_{oK}(t), \quad (193)$$

а при связях, обладающих такими же деформативными свойствами, как и тело [ $E_c(\tau) = E(\tau)$ ,  $\delta_c(t, \tau) = \delta(t, \tau)$ ], становится таким:

$$S_{xK}^*(t) - \frac{l_c}{F_c} \sigma_{xK}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \left[ S_{xK}^*(\tau) - \frac{l_c}{F_c} \sigma_{xK}^*(\tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -E(t) u_{oK}(t). \quad (194)$$

Решения упругомгновенных задач, выделяемые из (193) и (194), при  $\tau_1 = t$  имеют вид

$$S_{xK}(t) = -E(t) u_{oK}(t); \quad S_{xK}(t) - \frac{l_c}{F_c} \sigma_{xK}(t) = -E(t) u_{oK}(t). \quad (195)$$

Зависимости (193) и (194) относительно функций  $S_{xK}^*(t)$  и  $S_K^*(t) - l_c/F_c \sigma_{xK}^*(t)$  являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода. Если напряженное состояние вызвано внешними силами [ $u_{oK}(t) = 0$ ], уравнения (193) и (194) однородны и не имеют решений, отличных от тождественных нулей. В силу (195) при  $u_{oK}(t) = 0$  эти решения эквивалентны условиям на поверхности упругомгновенной задачи.

При напряженном состоянии, вызванном вынужденными деформациями [ $u_{oK}(t) \neq 0$ ], правые части уравнений (193) и (194) с помощью (195) могут быть выражены через решения соответствующих упругомгновенных задач. Очевидно, что полученные таким образом уравнения будут удовлетворены, если компоненты тензора напряжений, вычисленные с учетом ползучести, соответствуют (185). Поскольку, согласно (185), напряжения  $\sigma_x^*(t) \dots \tau_{xy}^*(t) \dots$  выражаются через напряжения  $\sigma_x(t), \dots, \tau_{xy}(t), \dots$ , найденные при условиях на поверхности упругомгновенной задачи, то сказанное ранее доказывает независимость от ползучести условий на поверхности в случаях (193) и (194).

Из уравнения (192) следует, что при различных характеристиках деформативностей тела и связей условия на поверхности зависят от ползучести [7, 84].

О практическом применении решений, основанных на равенствах (64). При практическом использовании теорем Н. Х. Арутюняна весьма существенным является вопрос о возможных погрешностях, вносимых в результате принятия условий (64).

При решении этого вопроса прежде всего необходимо иметь в виду, что во многих случаях в уравнения состояния зависимости, представляющие условия на контуре, коэффициент поперечного расширения вообще не входит. Естественно, что в таких случаях необходимость использования равенств (64) для доказательства теорем Н. Х. Арутюняна отпадает; речь идет прежде всего об обобщенном плоском напряженном состоянии при условиях на контуре, заданных в напряжениях [83, 85], а также о напряженном состоянии тонких цилиндрических оболочек средней длины (полубезмоментная теория), стержней и стержневых систем.

В свое время расчетным путем были вычислены возможные погрешности, связанные с использованием условия (64) в линейной теории ползучести [85]. Рассматривалось трехмерное термонапряженное состояние старого бетона. Оказалось, что если считать  $\nu_1 = \frac{1}{6}$ , то при переходе от  $\nu_2 = \frac{1}{6}$  к  $\nu_2 = 0$  коэффициент затухания напряжений  $H^*(\infty)$  увеличивается на 3,2—5,5%. Значения этих отклонений, относящихся к предельным случаям, могут считаться приемлемыми при выполнении практических расчетов.

Таким образом, если условия на поверхности однородного изотропного тела не зависят от ползучести, а в уравнения состояния и условия на контуре коэффициент поперечного расширения не входит или приемлемо использование условий (64), могут быть использованы равенства (170) и интегральные уравнения (185). В случае напряженного состояния, вызванного вынужденными деформациями, для решения уравнений (185) применяются способы, описанные в пп. 5 и 6 гл. III применительно к решению уравнений (97) и (95).

На рис. 33 для иллюстрации сказанного представлены эпюры температурных напряжений в поперечных сечениях призматической сваи, развивающихся в процессе термооб-

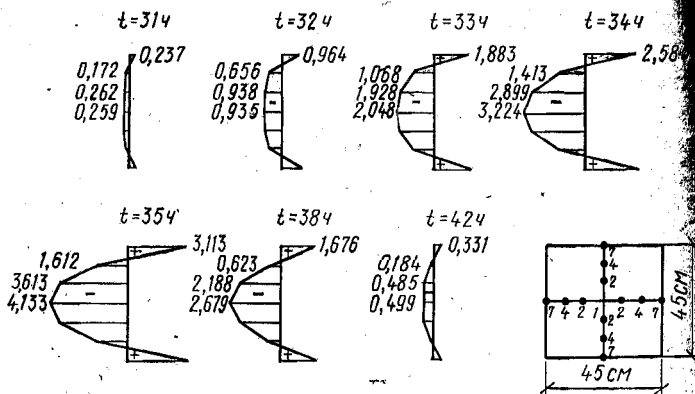


Рис. 33. Эпюры нормальных напряжений (МПа) в поперечных сечениях железобетонной сваи, развивающихся при термообработке

работки по режиму, показанному на рис. 12, при переменных температурных градиентах. Свая выполнена из гидротехнического бетона; кривые, характеризующие деформативность и прочность бетона, представлены на рис. 12 и 13. Аппроксимация меры ползучести была выполнена с помощью (42) соответствующие функции и коэффициенты приведены в гл. [см. (51)]. В силу примерно одинаковых значений коэффициентов линейного температурного расширения бетона и арматурной стали, а также относительно незначительного влияния на  $C(t, \tau)$  и  $E(\tau)$  места положения точки в поперечном сечении, сваю рассматривали как однородное и изотропное тело. Для вычисления напряжений период термообработки разбивали на 28 промежутков [см. пояснения к матрице (149)]. Упругомгновенные напряжения на протяжении каждого отрезка времени считали постоянными и определяли из решения способом конечных разностей уравнения термоупругости. Влияние ползучести учитывали по формуле (130) с использованием коэффициентов затухания напряжений, записанных в виде матрицы (149).

Как видно из рис. 33 и 12, несмотря на то, что бетонная смесь становится телом, способным воспринимать заметные напряжения уже примерно через 9 ч после укладки, температурные напряжения в свае формируются в процессе охлаждения. Это связано в первую очередь с относительно малыми значениями  $E(\tau)$  при разогреве.

## 1. СИСТЕМЫ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Напряженное состояние, вызванное силами или вынужденными деформациями, приложенными после постановки жестких связей. Железобетонные, каменные, деревянные строительные конструкции и конструкции из других материалов, как правило, являются системами, собранными из отдельных элементов путем постановки связей, обеспечивающих геометрическую неизменяемость, а во многих случаях и статическую неопределимость. В первом приближении можно считать, что элементы системы представляют собой однородные и изотропные тела, а связи между ними и опорные стержни — абсолютно жесткие. Эти тела обладают как упругими свойствами, так и ползучестью. Такие системы обычно называются системами, составленными из однородных элементов [85].

Влияние линейной ползучести и старения на напряженное и деформированное состояние системы, составленной из однородных элементов, аналогично соответствующему влиянию в однородном и изотропном теле [см. (170) и (185)]. Поэтому если обозначить через  $X_i^*(t)$  любое усилие в системе, составленной из однородных элементов [усилие в лишней связи, усилия в стержневой системе  $M_i^*(t)$ ,  $N_i^*(t)$ ,  $Q_i^*(t)$ ], то в силу (170) при действии внешней нагрузки

$$X_i^*(t) = X_i(t), \quad (196)$$

а при наличии вынужденных деформаций, согласно (185),

$$X_i^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t X_i^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = X_i(t), \quad (197)$$

где  $X_i(t)$  — решения соответствующих упругомгновенных задач. Естественно, что зависимости (196) и (197) справедливы в случаях, когда: а) выполняется условие (64); б) напряженные состояния элементов не зависят от коэффициентов поперечных деформаций.

Решение уравнения (197) при нестационарных и стационарных вынужденных деформациях удобно представить в виде произведений:

$$X_i^*(t) = X_i(t) H(t, \tau_1), \quad X_i^*(t) = X_i(\tau_1) H^*(t, \tau_1). \quad (198)$$

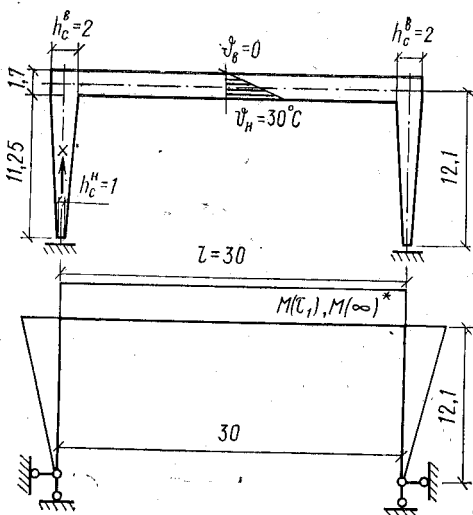


Рис. 34. Схема железобетонной предварительно-напряженной рамы и эпюра изгибающих моментов в ней (размеры в метрах)

Для решения уравнения (197) и определения коэффициентов  $H(t, \tau_1)$  и  $H^*(t, \tau_1)$  используются способы, описанные в гл. III применительно к уравнениям (95) и (97), а в некоторых случаях и табл. 15 и 16.

На рис. 34 показана эпюра изгибающих моментов в железобетонной предварительно-напряженной раме, вызванных линейным по высоте сечения ригеля изменением температуры: снизу  $\theta_n = 30^\circ\text{C}$ , сверху  $\theta_b = 0^\circ\text{C}$ . Рама выполнена с применением бетона марки М 500,  $E = 3,8 \cdot 10^4$  МПа,  $\varphi(\infty, 28) = 2,16$ ,  $\varphi(\infty, \infty) = 1,08$ , коэффициент линейного температурного расширения бетона и арматуры  $\alpha = 10^{-5}$ .

При расчетах предполагалось, что опоры рамы закреплены неподвижно, все стержни рамы работают без трещин, влияние арматуры на деформативность мало и может не учитываться. Эти предпосылки позволяют считать, что рама является системой, составленной из однородных элементов, и влияние ползучести на усилия в лишних связях, а следовательно, и на внутренние усилия описывается интегральным уравнением [197].

Рассматривались два варианта резкого повышения температуры: при  $\tau_1 > 360$  сут и при  $\tau_1 = 28$  сут. Коэффициенты затухания усилий подсчитывались для 1-го варианта по формуле, записанной в 1-й строке табл. 13, для 2-го — по табл. 16 с выполнением интерполяции. Поскольку было

принято  $E(\tau) = E = \text{const}$ , то значения изгибающего момента в ригеле сразу же после повышения температуры оказались одинаковыми для обоих вариантов и равными  $M(\tau_1) = -1397 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . После затухания процесса ползучести при  $\tau_1 > 360$  сут  $M(\infty) = -678 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , при  $\tau_1 = 28$  сут  $M(\infty) = -314 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

**Напряженное состояние, формирующееся в случае постановки дополнительных связей после приложения внешней нагрузки.** Во многих случаях процесс возведения сооружения, со статической точки зрения, заключается в последовательном наложении связей. Часть этих связей ставится после восприятия сооружением нагрузки, например собственного веса. Такой способ возведения характерен для железобетонных конструкций, собираемых из отдельных, заранее изготовленных элементов. Если сборные элементы не обладают ползучестью, то упругое деформирование происходит в процессе восприятия нагрузки и завершается до постановки дополнительных связей. При наличии ползучести новые связи препятствуют свободному деформированию элементов от ранее приложенной нагрузки, в результате чего формируются усилия, влияющие на напряженное состояние собранной конструкции [122].

Рассмотрим систему, составленную из однородных элементов; система может быть статически определимой и статически неопределимой. Нагрузка в виде обобщенной силы с параметром  $P(t)$  прикладывается в момент времени  $\tau_1$  (рис. 35). При  $\tau_2 > \tau_1$  в систему вводятся  $m$  дополнительных

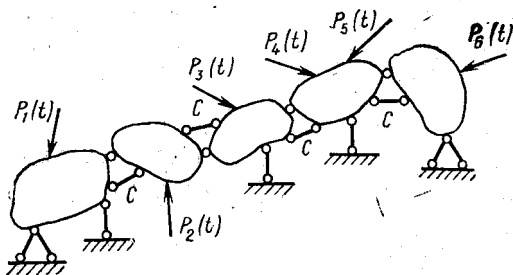


Рис. 35. Геометрически неизменяемая система

$c$  — дополнительные связи, введенные после приложения внешней нагрузки;  $P_1(t) = k_1 P(t)$ ;  $P_2(t) = k_2 P(t)$ , ...,  $P_6(t) = k_6 P(t)$



ных жестких связей. Для определения усилий, развивающихся в этих связях,  $X_1^*(t)$ ,  $X_2^*(t)$ , ...,  $X_m^*(t)$  используется метод сил. Поскольку перемещения при действии внешних сил в упругом теле, обладающем ползучестью, при выполнении условий (64) определяются по формулам типа (172), а напряжения упругомгновенной задачи прямо пропорциональны нагрузке, то для перемещений основной системы в направлении  $i$ , вызванных силой  $X_j(t)$  ( $t > \tau_2$ ), применяется зависимость  $[E(\tau) = E = \text{const}]$

$$u_{ij}^*(t) = \delta_{ij} \left[ X_j^*(t) - E \int_{\tau_2}^t X_j^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = \delta_{ij} K X_j^*, \quad (199)$$

где  $\delta_{ij}$  — упругое перемещение от силы  $X_j = 1$ ;  $K$  — интегральный оператор.

Перемещение основной системы в направлении  $i$  от внешних сил, в соответствии со (199), определяется с помощью формулы

$$u_{ip}^*(t) = \delta_{ip} \left[ P(t) - P(\tau_2) - E \int_{\tau_1}^t P(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + E \int_{\tau_2}^{\tau_1} P(\tau) \frac{\partial C(\tau_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = \delta_{ip} K_1 P, \quad (200)$$

причем  $K_1$  — оператор, стоящий в квадратных скобках;  $\delta_{ip}$  — упругое перемещение при параметре обобщенной силы  $P(t) = 1$ ;  $P(\tau_2)$  и слагаемое, включающее интеграл от  $\tau_2$  до  $\tau_1$ , учитывают перемещения, развивающиеся до постановки дополнительных связей.

Принимая во внимание все сказанное, система канонических уравнений для определения усилий в дополнительных связях может быть записана в виде

$$\delta \vec{K} \vec{X}^* + K_1 P \vec{\delta}_p = 0. \quad (201)$$

В этом уравнении  $\delta$  — квадратная матрица, составленная из коэффициентов  $\delta_{ij}$ ;  $\vec{\delta}_p$  — вектор грузовых коэффициентов  $\delta_{ip}$ .

Если считать, что связи введены до приложения нагрузки, то система уравнений для определения вектора усилий соответствующей упругомгновенной задачи  $\vec{X}$  имеет вид

$$\delta \vec{X} + P \vec{\delta}_p = 0. \quad (202)$$

Решение уравнения (201) относительно вектора  $\vec{KX}^*$ , как обычно, представляется через обратную матрицу

$$\vec{KX}^* = \delta^{-1} \delta_p K_1 P. \quad (203)$$

Поэтому функция  $KX_i^*$  может определяться с помощью зависимости

$$KX_i^*(t) = -(b_{i1} \delta_{1p} + b_{i2} \delta_{2p} + \dots + b_{im} \delta_{mp}) K_1 P(t), \quad (204)$$

причем  $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im}$  являются элементами матрицы  $\delta^{-1}$ , т. е. матрицы, обратной матрице, составленной из коэффициентов канонических уравнений метода сил упругомгновенной задачи (202).

Решение матричного уравнения (202) определяется согласно (204) при  $K = 1$  и  $K_1 = 1$ . Это свидетельствует о существовании интегральных уравнений

$$KX_i^* = \frac{X_i(t)}{P(t)} K_1 P, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (205)$$

которые с помощью (199) и (200) могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned} X_i^*(t) - E \int_{\tau_2}^t X_i^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \frac{X_i(t)}{P(t)} \left[ P(t) - P(\tau_2) - E \int_{\tau_1}^t P(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ \left. + E \int_{\tau_1}^{\tau_2} P(\tau) \frac{\partial C(\tau_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (206) \end{aligned}$$

Следовательно, усилие в любой дополнительной связи  $X_i^*(t)$  выражается через соответствующее усилие упругомгновенной задачи  $X_i(t)$ , подсчитанное в предположении, что введены дополнительные связи до приложения нагрузки, с помощью уравнения (206). Если внешняя нагрузка постоянна во времени  $P(t) = P$ , правая часть (206) существенно упрощается

$$X_i^*(t) - E \int_{\tau_2}^t X_i^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = X_i [\varphi(t, \tau_1) - \varphi(\tau_2, \tau_1)]. \quad (207)$$

При аппроксимации  $C(t, \tau)$  по (70)

$$X_i^*(t) - E \int_{\tau_2}^t X_i^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \beta \varphi(t, \tau_2) X_i, \quad (20)$$

причем коэффициент

$$\beta = \frac{\theta(\tau_1)}{\theta(\tau_2)} e^{-\gamma_1(\tau_2 - \tau_1)} \ll 1 \quad (20)$$

учитывает степень проявления деформаций ползучести промежутке времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$ ; при  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$   $\beta \rightarrow 1$ , при  $\tau_2 - \tau_1 \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$ . Необходимо иметь в виду, что значение  $\beta$  обычно связано с деформациями ползучести и старения, проходящими за относительно короткий отрезок времени, тогда как принятая зависимость (70) удобна для аппроксимации соответствующих кривых на больших промежутках времени [см. (31), табл. 4]. Поэтому при выполнении расчетов систем, составленных из бетонных элементов лучше использовать формулу

$$\beta = [1 - f(\tau_2 - \tau_1)] K_8(\tau_1) / K_8(\tau_2), \quad (210)$$

слагаемые которой определяются:  $f$ , например, по формуле (31a),  $K_8$  — по табл. 2.

Для получения решения уравнения (208) рассмотрим вспомогательную задачу. Будем полагать, что все связи системы, включая дополнительные, наложены в момент  $t_0$  до формирования напряженного состояния. С момента времени  $\tau_2$  возникло напряженное состояние, вызванное вынужденными деформациями. Согласно (197), при  $E(\tau) = E = \text{const}$  усилие в связи можно определить с помощью уравнения

$$X_i^*(t) - E \int_{\tau_2}^t X_i^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = X_i, \quad (211)$$

где  $X_i$  — решение упругой задачи.

В случае разыскания решения (211) в виде суммы

$$X_i^*(t) = X_i + \frac{1}{\beta} \Delta X_i^*(t) \quad (212)$$

приращение  $\Delta X_i^*(t)$  находится из интегрального уравнения

$$\Delta X_i^*(t) - E \int_{\tau_2}^t \Delta X_i^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -\varphi(t, \tau_2) \beta X_i. \quad (213)$$

Если использовать обычное представление

$$X_i^*(t) = X_i H^*(t, \tau_2), \quad (214)$$

то формула (212) приводит к зависимости

$$\Delta X_i^*(t) = \beta X_i [1 - H^*(t, \tau_2)]. \quad (215)$$

Идентичность интегральных уравнений (213) и (208) позволяет представить решение последнего достаточно просто

$$X_i^*(t) = \beta X_i [1 - H^*(t, \tau_2)] \quad (216)$$

через коэффициент затухания внутренних усилий, вызванных стационарными вынужденными деформациями  $H^*(t, \tau)$ , и решение упругомгновенной задачи  $X_i$ , выполненное в предположении постановки дополнительных связей до приложения внешней нагрузки

На рис. 36 изображена схема балки, собранной из предварительно-напряженных железобетонных элементов путем постановки дополнительных связей после загрузки, а также эпюра изгибающих моментов в этой балке от внешней нагрузки.

При обычных коэффициентах армирования потери усилий от ползучести и усадки бетона в элементах железобетонных конструкций составляют незначительную часть от начального обжатия. Если пренебречь величиной потерь и считать, что напряжения в арматуре во времени не изменяются, то усилия предварительного обжатия можно отнести к внешним постоянным силам. Такое допущение позволяет использовать методику, описанную ранее применительно к внешним силам, для определения усилий в дополнительных связях сборных железобетонных конструкций, возникающих от предварительного напряжения арматуры.

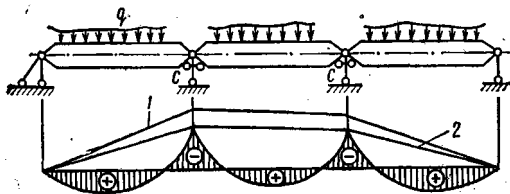


Рис. 36. Эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в железобетонной балке, собранной из отдельных элементов (заштрихована)

$c$  — связи, введенные после приложения внешней нагрузки; 1 и 2 — эпюры изгибающих моментов от усилий в связях, построенные в предположении, что связи введены до и после загрузки

### 3. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

**Основные зависимости и уравнения.** В ряде случаев, например, в различного типа бетонных и железобетонных цилиндрических опорах, соединениях элементов деревянных конструкций, фундаментах на основаниях из связных грунтов и т. д., ползучесть приводит к значительному изменению во времени картины напряженного и деформированного состояния [8, 9, 83].

Рассмотрим случай плоской деформации [83]. В этом случае согласно положениям, сформулированным в п. гл. IV, напряжения, вызванные действием внешних поверхностных сил при выполнении условия (64), не зависят от линейной ползучести. Поэтому деформации и перемещения с учетом ползучести могут быть записаны через напряжения упругомгновенной задачи.

Согласно [131], вертикальные перемещения границы упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации под действием переменных во времени нормальных сил  $p(x, t)$ , определяются формулой

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi E(t)} (1 - \nu^2) \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s, t) ds + c(t), \quad (217)$$

где  $2a$  — ширина участка приложения усилий,  $c(t)$  — произвольная постоянная.

Учитывая все сказанное выше, такие же перемещения границы полупространства с учетом ползучести можно вычислить по формуле

$$v^*(x, t) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E(t)} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s, t) ds - \\ - \frac{2}{\pi} (1 - \nu^2) \int_{\tau_1}^t \int_{-a}^a \ln \frac{1}{(x-s)} p(s, \tau) ds \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + c^*(t). \quad (218)$$

Как известно [131], соответствующие вертикальные упругие перемещения двух тел  $v_1$  и  $v_2$  в местах их контакта связаны уравнением

$$v_1(t, x) + v_2(t, x) = \delta(t) - f_1(x) - f_2(x), \quad (219)$$

где  $\delta(t)$  — суммарное неупругое перемещение;  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — уравнения поверхностей первого и второго тел.

Разумеется, уравнение (219) справедливо как для деформаций упругомгновенной задачи, так и для полных деформаций с учетом ползучести. Ограничиваясь рассмотрением случая контакта первого и второго тел без сил трения и сцепления, после подстановки в (219) значений  $v_1$  и  $v_2$ , записанных по (218), получим следующее интегральное уравнение по переменным  $x$  и  $t$ :

$$\frac{2}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1-v_1^2}{E_1(t)} + \frac{1-v_2^2}{E_2(t)} \right] \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds - \int_{\tau_1}^t \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [(1-v_1^2) \delta_1(t, \tau) + (1-v_2^2) \delta_2(t, \tau)] d\tau \right\} = c^*(t) - f_0(x), \quad (220)$$

где  $f_0(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , причем  $f_0(x)$  не зависит от  $t$ ;  $2a(t)$  — переменная ширина контакта; индексы 1 и 2 у характеристик деформативности  $\nu$ ,  $E$  и  $\delta$  соответствуют номеру тела.

Интегральное уравнение (220) можно переписать в следующей, более компактной форме

$$w(x, t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) w(x, \tau) d\tau = \frac{c^*(t) - f_0(x)}{\nu(t)}, \quad (221)$$

где

$$w(x, t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds; \quad (222)$$

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{(1-v_1^2) \delta_1(t, \tau) + (1-v_2^2) \delta_2(t, \tau)}{\nu(t)} \frac{2}{\pi}; \quad (223)$$

$$\nu(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1-v_1^2}{E_1(t)} + \frac{1-v_2^2}{E_2(t)} \right]. \quad (224)$$

Отсюда видно, что разрешающее уравнение (220) контактной задачи с учетом ползучести распадается на интегральное уравнение Фредгольма первого рода (222), описывающее упругомгновенную задачу, и интегральное уравнение Вольтерра второго рода (221), учитывающее влияние ползучести.

Решение уравнения (221) может быть представлено в виде

$$w(x, t) = \gamma^*(t) - H(t) f_0(x), \quad (220)$$

где  $\gamma^*(t)$  — решение при правой части, равной  $c^*(t)/v$ ,  $H^*(t)$  — то же, при правой части, равной  $1/v(t)$ .

Поэтому (222) можно записать в виде интегрального уравнения

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds = \gamma^*(t) - H(t) f_0(x), \quad (221)$$

являющегося обычным уравнением упругомгновенной задачи для момента времени  $t$  с дополнительным множителем при  $f_0(x) - H^*(t)$ , учитывающим влияние ползучести. Если это так, то, воспользовавшись решениями Н. А. Ростоцкого [109] и М. Г. Крейна [55] для упругомгновенной контактной задачи, позволяющими легко получить расчетные формулы при различных функциях  $f_0(x)$ , запишем для случая симметричного приложения внешней силы

$$p^*(x, t) = \frac{\gamma^*(t)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} + H(t) \frac{2}{\pi^2} \int_x^{a(t)} \frac{u}{\sqrt{u^2 - x^2}} \int_0^u \frac{f_0''(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}} ds du. \quad (222)$$

В этой формуле первый член, представляющий решение с особенностями в точках  $x = \pm a$ , сохраняется только в случае заданной ширины контакта  $2a$ , причем  $\gamma^*(t)$  определяется из уравнения равновесия

$$P(t) = \int_{-a}^a p^*(s, t) dx. \quad (223)$$

Когда ширина контакта  $2a$  не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, необходимо положить  $\gamma^*(t) = 0$  и искать  $a(t)$  по уравнению

$$P(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} p^*(s, t) dx. \quad (224)$$

Интегральное уравнение для определения  $H^*(t)$ , согласно (221) — (225), записывается в виде

$$H(t) - \bar{E}(t) \int_{\tau_1}^t H(\tau) \frac{\partial \bar{\delta}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\pi}{2} \bar{E}(t), \quad (225)$$

где

$$\bar{E}(t) = \frac{E_2(t)}{(1-\nu_2^2)(1+m'_y)}; \quad \bar{\delta}(t, \tau) = (1-\nu_1^2) \delta_1(t, \tau) + (1-\nu_2^2) \delta_2(t, \tau); \quad (231)$$

$$m'_y(t) = \frac{E_2(t)(1-\nu_1^2)}{E_1(t)(1-\nu_2^2)}. \quad (232)$$

Можно показать, что если  $\sigma^*(t)$ , выраженное согласно первой формуле (104), подставить в (97), получим

$$H(t, \tau_1) - E(t) \int_{\tau_1}^t H(\tau, \tau_1) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 1. \quad (233)$$

Если считать, что  $H(t, \tau_1)$  является решением уравнения (233) при

$$E(\tau) = \bar{E}(\tau), \quad \delta(t, \tau) = \bar{\delta}(t, \tau), \quad (234)$$

то из сопоставления (230) и (233) следуют зависимости [см. также 2-ю формулу (106)]

$$H(t) = \frac{\pi}{2} \bar{E}(t) H(t, \tau_1) = \frac{\pi}{2} \bar{E}(\tau_1) H^*(t, \tau_1). \quad (235)$$

Таким образом, заменив в (233) функции, представляющие характеристики деформативности согласно (234) и решив полученное уравнение, найдем  $H(t, \tau)$ , а затем  $H(t)$ . Это позволяет использовать методику определения коэффициентов  $H(t, \tau_1)$  и  $H^*(t, \tau_1)$ , изложенную в п. 6 гл. III. При произвольном изменении скорости ползучести и старения удобен приближенный способ, основанный на формуле (137) и связанный с построением матрицы  $\mathbf{R}$  путем обращения матрицы  $\Delta\delta$ , элементы которой выражаются через дискретные значения  $E(\tau)$  и  $\delta(t, \tau)$ .

При контакте тел, обладающих одинаковыми характеристиками деформативности, произведение  $\bar{E}(t) \frac{\partial \bar{\delta}(t, \tau)}{\partial \tau}$  выражается в произведение  $E(t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau}$  и для определения  $H(t, \tau)$  могут использоваться формулы, приведенные в табл. 15; при этом  $\bar{E}(t) = E(t)/2(1-\nu^2)$ .

При описании контакта дисков, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, во всех приведенных ранее формулах необходимо положить  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ .



Формулы для случая симметричного приложения внешней силы. А. Контакт происходит по параболической цилиндрической поверхности  $f_0(x) = x^2/2R$ ; ширина контакта задана. Подставив значение  $f_0(x)$  в (227), после выполнения элементарных операций найдем

$$p^*(x, t) = \frac{\gamma^*(t)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{H(t)}{\pi R} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (236)$$

Вследствие ограниченной ширины контакта и наличия особых точек  $\gamma^*(t) \neq 0$  определяется с помощью уравнения (228) и равно

$$\gamma^*(t) = P(t) - \frac{H(t) a^2}{2R}. \quad (237)$$

Из (236) и (237) получим окончательно

$$p^*(x, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[ P(t) + \frac{H(t)}{2R} (a^2 - 2x^2) \right], \quad (238)$$

причем эта формула справедлива при  $\gamma^*(t) > 0$ , т. е. когда  $P(t) > H(t) a^2/2R$ . Из этого решения очевидно, что если контакт происходит по прямой, то в формуле (238) второй член, связанный с  $f_0''(s)$  (см. (227)], обращается в нуль, в силу чего

$$p^*(x, t) = p(x, t) = \frac{P(t)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (239)$$

и ползучесть не оказывает влияния на распределение усилий в месте контакта.

Б. Контакт происходит по параболической цилиндрической поверхности  $f_0(x) = x^2/2R$ ; ширина контакта не задана. Поскольку особые точки отсутствуют, в (227) и соответственно в (236) нужно положить  $\gamma^*(t) = 0$ . Поэтому

$$p^*(x, t) = \frac{H(t)}{\pi R} \sqrt{a^2(t) - x^2}, \quad (240)$$

где  $a^2(t)$  определяется из уравнения (229) и равно:

$$a^2(t) = 2P(t) R/H(t). \quad (241)$$

Рис. 37. Усилия в месте контакта двух бетонных дисков

Отсюда следует формула

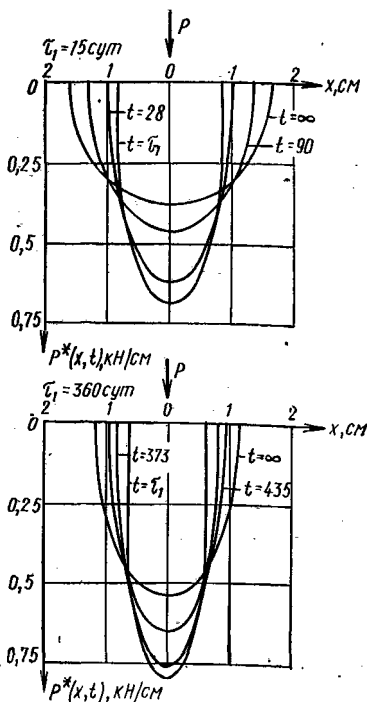
$$p^*(x, t) = \frac{H(t)}{\pi R} \sqrt{\frac{2RP(t)}{H(t)} - x^2} \quad (242)$$

На рис. 37 показаны вычисленные по этим формулам усилия в месте контакта двух бетонных дисков толщиной 20 см. Поверхности контакта не имеют особых точек и удовлетворяют условию  $f_0 x = x^2/2 R$ , причем  $R = 1000$  см;  $P(t) = P = 10$  кН/см. Коэффициент  $H(t, \tau_1)$  [см. (235)] вычислен по формуле, записанной в 3-й строке табл. 14.

В соответствии с формулами (316) и (36):  $\gamma_1 = 0,006$  1/сут,  $\alpha = 0,0259$  1/сут,  $\beta = 0,372$ ; согласно (20), (53), рис. 10 и табл. 8:  $B_0 = 1,05$ ;  $B_1 = 38,4$ ;  $\tau = 11,3$  сут.

#### 4. ДЛИТЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ, ВЫПОЛНЕННОГО ИЗ МАТЕРИАЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПОЛЗУЧЕСТЬЮ. РАСЧЕТ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

Уравнение медленного движения. Вопрос о влиянии ползучести на устойчивость впервые был рассмотрен А. Р. Ржаницыным применительно к поведению центрально-сжатого стержня после начального вынужденного отклонения [106]. Ю. Н. Работновым и С. А. Шестериковым предложена методика формулировки условий устойчивости, основанная на вариациях [102]. В дальнейшем оказалось более естественным рассматривать сжатые стержни, обладающие малыми начальными несовершенствами, т. е. не-



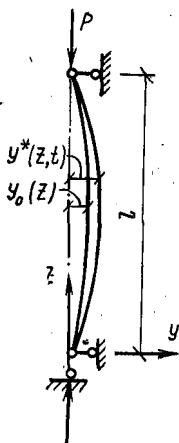


Рис. 38. Сжатый стержень, имеющий начальную погибь

избежными несовершенствами технологического характера [129, 86]. Такой подход позволяет объединить методику определения критических сил при длительном действии нагрузки и перемещений, необходимых для проверки прочности при расчете по деформированной схеме. С этих позиций далее и выполняется изучение длительного деформирования сжатого стержня, обладающего линейной ползучестью. В конце параграфа обсуждается вопрос о применимости описанного решения для расчета стержней, изготовленных из реальных строительных материалов.

Будем рассматривать однородный и изотропный стержень с начальной погибью  $y_0(z)$ . Стержень выполнен из материала, обладающего линейной ползучестью, и имеет поперечное сечение, симметричное относительно одной из главных центральных осей. Внешние силовые воздействия заданы в виде сжимающей силы  $P < P_{cr}$ , приложенной в момент времени  $\tau_1$ ; под  $P_{cr}$ , как обычно, понимается критическая сила для упругого стержня. Изгиб и потеря устойчивости могут происходить в плоскости  $zOy$ ; потеря устойчивости из этой плоскости исключена (рис. 38).

Наличие ползучести приводит к тому, что прогиб стержня, сформировавшийся при приложении нагрузки, будет развиваться. Поэтому прогиб, кривизна и изгибающий момент в стойке при  $t > \tau_1$  являются функциями не только положения сечения по высоте стержня, но и продолжительности действия нагрузки.

При записи уравнения устойчивости, в данном случае уравнения медленного движения, примем во внимание, что линейная ползучесть не влияет ни на зависимость между деформациями крайних волокон  $\varepsilon_1^*(z, t)$ ,  $\varepsilon_2^*(z, t)$  и кривизной  $\rho^*(z, t)$ , ни на зависимости между напряжениями  $\sigma_1^*(z, t)$ ,  $\sigma_2^*(z, t)$  и усилиями  $P$ ,  $M^*(z, t)$ , действующими в сечении. В силу этого в условиях ползучести справедливы зависимости:

$$\frac{1}{\rho^*(z, t)} = \frac{\varepsilon_1^*(t) - \varepsilon_2^*(t)}{h}; \quad \frac{1}{\rho^*(z, t)} = \frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial z^2} - \frac{d^2 y_0(z)}{dz^2}; \quad (243)$$

$$\sigma_1^*(z, t) = \frac{P}{F} + \frac{M^*(t)}{J} h_1, \quad \sigma_2^*(z, t) = \frac{P}{F} - \frac{M^*(t)}{J} h_2. \quad (244)$$

Для записи уравнения медленного движения стержня к зависимостям (243) и (244) необходимо добавить формулу (74), связывающую напряжения с деформациями. Первая зависимость (243) совместно с (74) и (244) позволяет представить вторую зависимость (243) в виде интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{J} \left[ \frac{M^*(z, t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t M^*(z, \tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = \frac{d^2 y_0(z)}{dz^2}. \quad (245)$$

Приняв во внимание, что в данном случае

$$M^*(t) = -P y^*(z, t), \quad (246)$$

можно (245) привести к уравнению

$$\frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial z^2} + \frac{P}{J} \left[ \frac{y^*(z, t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t y^*(z, \tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = \frac{d^2 y_0(z)}{dz^2}, \quad (247)$$

позволяющему определить прогиб  $y^*(z, t)$  в произвольный момент времени.

Если считать, что стержень шарнирно оперт по концам и принять

$$y_0(z) = f_0 \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y^*(z, t) = f^*(t) \sin \frac{\pi z}{l} \quad (248)$$

( $l$  — длина стержня), то из (247) можно выделить такое интегральное уравнение:

$$f^*(t) - \frac{E(t)}{1 - \zeta(t)} \int_{\tau_1}^t f^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = f_1(t). \quad (249)$$

В этом уравнении

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= P_0(t)/P; \quad P_0(t) = \pi^2 J E(t)/l^2; \\ f_1(t) &= f_0 [1 - P/P_0(t)]^{-1}. \end{aligned} \quad (250)$$

Если модуль упругомгновенных деформаций стержня в процессе развития ползучести постоянен  $E(t) = E(\tau_1) = E = \text{const}$ , то уравнение (249) принимает вид

$$f^*(t) - \frac{E}{1 - \zeta} \int_{\tau_1}^t f^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = f_1(\tau_1). \quad (251)$$

Для построения решения уравнения (251) удобно использовать найденное решение уравнения (97). Если считать, что модуль упругомгновенных деформаций постоянен, а вынужденные деформации стационарны, то (97) примет вид

$$\sigma^*(t) - E \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma(\tau_1). \quad (252)$$

Легко заметить, что уравнение (251) отличается от этого уравнения, помимо различия в неизвестных функциях, только наличием при  $E$  множителя  $1/(1 - \zeta)$ . Поэтому, заменив в соответствующих решениях (97)  $\sigma^*(t)$  на  $f^*(t)$ ,  $\sigma(\tau_1)$  на  $f(\tau_1)$  и умножив на  $1/(1 - \zeta)$  слагаемые, содержащие  $E$ , получим решение уравнения (251).

В частности, если принять  $C(t, \tau)$  согласно (70), учесть первую зависимость (106) и формулу, записанную в 1-й строке табл. 14, придем к выражению

$$f^*(t) = f_1(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{a+c}{\zeta - (1+c)} \left[ e^{\frac{-\gamma_1 [\zeta - (1+c)] + a [1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}] / \xi}{\zeta - 1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F(t) - F(\tau_1) \right] \right\}, \quad (253)$$

где

$$F(t) = 1 + F_1(t) + F_1(t) F_2(t) + \dots;$$

$$F_i(t) = \frac{ae^{-\gamma_1(t-\tau_1)}}{\zeta(1+i\xi) - (c+i\xi+1)};$$

$$c = EC_0, \quad a = EAe^{-\gamma\tau_1}, \quad \xi = \gamma/\gamma_1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (254)$$

**Определение перемещений в условиях длительного действия нагрузки.** Начнем с рассмотрения стержня, выполненного из нестареющего материала. Очевидно, что для такого стержня необходимо положить  $A = 0$ . При этом  $F(t - \tau_1) = F(0) = 1$  и (253) после несложных преобразований принимает вид

$$f(t) = f_1(\tau_1) \frac{\zeta - [1 + ce^{-\gamma_1[\zeta - (1+c)](t-\tau_1)/(\zeta-1)}}{\zeta - (1+c)}. \quad (255)$$

На характер нарастания во времени амплитуды прогиба  $f(t)$  существенное влияние оказывает знак разности  $\zeta - (1 + c)$ , связанный с отношением между  $P_0$  и  $(1 + c)P$ .

Легко заметить, что развитие прогибов во времени при

$$\zeta > 1 + c, \quad P_0 > (1 + c)P \quad (256)$$

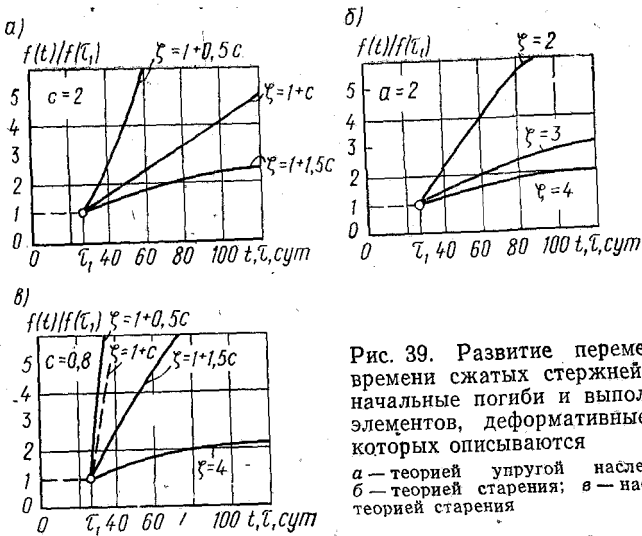


Рис. 39. Развитие перемещений во времени сжатых стержней, имеющих начальные погибы и выполненных из элементов, деформативные свойства которых описываются

а — теорией упругой наследственности; б — теорией старения; в — наследственной теорией старения

имеет затухающий характер. Если

$$\xi < 1+c, P_0 < (1+c)P, \quad (257)$$

то при  $t - \tau \rightarrow \infty$  получим  $f(t) \rightarrow \infty$ , т. е. прогиб стремится к бесконечности. В предельном случае, когда

$$\xi = 1+c, \quad (258)$$

формула (255) приводит к неопределенности, раскрыв которую получим

$$f(t) = f_1(\tau_1) [1 + \gamma_1(t - \tau_1)]. \quad (259)$$

Таким образом, при выполнении условия (258) деформация стержня происходит с постоянной скоростью, т. е. имеет установившийся характер.

Кривые нарастания прогибов стержня во времени для случаев (256), (257) и (258) изображены на рис. 39, а.

Заметим, что деформирование с постоянной скоростью при выполнении условия (258) связано только с принятой аппроксимацией меры ползучести (70) при  $A = 0$ . При использовании выражения (49), в случае  $B_1 + B_2 = 1$ , решение уравнения (251) оказывается таким:

$$f_*(t) = f(\tau_1) \left\{ \frac{\bar{\varphi}}{\sqrt{n_1^2 - 4n_2}} \left[ - \left( D - \frac{\bar{r}_2}{1 + \bar{\varphi}} \right) e^{-\bar{r}_1 t} + \left( D - \frac{\bar{r}_1}{1 + \bar{\varphi}} \right) e^{-\bar{r}_2 t} \right] + \frac{1}{1 + \bar{\varphi}} \right\} \quad (260)$$

и при условии (258) приводит к формуле

$$f^*(t) = f(\tau_1) \left[ 1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\bar{n}} t + (1 - e^{-\bar{n}t}) \left( \frac{D}{\bar{n}} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\bar{n}^2} \right) \right], \quad (261)$$

где  $\bar{\varphi} = \varphi / (1 - \zeta)$ ; коэффициенты  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{n}_2$ ,  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  определяются по формулам, записанным в 3-й строке табл. 13, с заменой  $\varphi$  на  $\varphi / (1 - \zeta)$ ;  $\bar{n} = \gamma_1 + \bar{\gamma}_2 - D$ . В этом случае только при  $t \rightarrow \infty$  деформирование стержня происходит с постоянной скоростью.

Деформирование сжатых стержней в сооружениях должно иметь затухающий характер, отвечающий условию (256). Сжимающая сила, удовлетворяющая равенству (258), может быть названа критической силой при длительном действии нагрузки  $P_d$ . Очевидно, что

$$P_d = P_0 / (1 + c). \quad (262)$$

Учитывая (250), получим

$$P_d = \pi^2 E_{об} J / l^2, \quad (263)$$

где  $E_{об}$  — модуль обратимых деформаций:

$$E_{об} = E / (1 + c). \quad (264)$$

Для тела, деформации ползучести которого полностью обратимы,  $E_{об} = H$  [см. (90)]; для тела, имеющего и необратимые деформации ползучести,  $E_{об} > H$ .

Понятие критической силы при длительном действии нагрузки и формула (262) впервые введены в работе [106]. Однако если в [106] под критической понимается сила, при которой случайное отклонение прямого стержня сохраняется неограниченно долгое время, то в данном случае критической называется сила, вызывающая бесконечное и равномерное нарастание прогиба стержня, имеющего начальную погибь [129]. Заметим, что при  $t - \tau = \infty$  формула (255) приводит к зависимости  $f(\infty) = f(\tau_1) (\zeta - 1) / [\zeta - (1 + c)]$ , которая с учетом (250) и (264) может быть представлена в виде

$$f(\infty) = f_0 / (1 - P/P_d), \quad (265)$$

внешне аналогичном третьей формуле (250).

Рассмотрим теперь стержень, который выполнен из стареющего материала, обладающего ползучестью, описываемой теорией старения. Соответствующее выражение для прогиба можно получить, если в (253) и (254) положить

$c = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma$ . При этом оказывается возможным представить функцию  $F$  в замкнутом виде

$$F(t - \tau_1) = \frac{\xi - 1}{ae^{-\gamma(t - \tau_1)}} \left[ e^{\frac{ae^{-\gamma(t - \tau_1)}}{\xi - 1}} - 1 \right]$$

и получить следующую формулу:

$$f(t) = f_1(\tau_1) e^{\frac{a [1 - e^{-\gamma(t - \tau_1)}]}{\xi - 1}} \quad (266)$$

На основании второй зависимости (91) и формулы (70) формулу (266) можно переписать так:

$$f(t) = f_1(0) e^{\varphi(t)/(\xi - 1)} \quad (267)$$

Из (267) следует, что деформации стержня, выполненного из стареющего материала, характеризующегося мерой ползучести (91), при длительном действии нагрузки затухают, если  $P < P_0$  (см. рис. 39, б).

Таким образом, для стержня, выполненного из материала, длительное деформирование которого описывается теорией старения, нет критической силы  $P_d < P_0$ , т. е. силы, способной вызвать непрерывное увеличение деформаций во времени.

Для стержня, выполненного из материала, характеризующегося мерой (70) при  $C_0 \neq 0$  и  $A \neq 0$ , прогиб в любой момент времени может быть подсчитан по формуле (253). Если значение сжимающей силы  $P$  удовлетворяет условию (256), то при  $t - \tau_1 \rightarrow \infty$

$$F(t - \tau_1) \rightarrow 1; \quad f(t) \rightarrow f_1(\tau_1) \left[ 1 + \frac{c + a}{\xi - (1 + c)} F(0) \right], \quad (268)$$

т. е. перемещения стержня во времени стремятся к конечной величине.

Если значение сжимающей силы  $P$  удовлетворяет условию (257), то при  $t - \tau \rightarrow \infty$  в (253) первый член суммы, стоящей в квадратных скобках, стремится к бесконечности, второй член постоянен; следовательно,  $f(t) \rightarrow \infty$ , т. е. прогиб неограниченно возрастет (см. рис. 39, в).

Для более наглядного представления о характере кривых развития прогибов укажем, что, например, при  $\xi =$



$= \bar{I} + c/2$  выражение (253) может быть представлено в замкнутой форме ( $\gamma = \gamma_1$ )

$$f(t) = f_1(\tau_1) \left\{ 1 + 2 \left( 1 + \frac{a}{c} \right) \left[ e^{\gamma(t-\tau_1) - 2 \frac{a}{c} [1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}]} - 1 \right] \right\} \quad (269)$$

Предельный случай имеет место при выполнении условия (258); формула (253) при этом приводит к неопределенности, раскрытие которой дает

$$f(t) = f_1(\tau_1) \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{a}{c} \right) e^{a/c} \left[ \gamma(t-\tau_1) + \frac{a}{c} [1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}] \right] \right\} \quad (270)$$

Как видно из этой формулы, характер развития прогиба при длительном действии нагрузки определяется суммой, стоящей в двойных квадратных скобках. Первый член этой суммы непрерывно возрастает, второй асимптотически приближается к постоянному значению  $a/c$ . Учитывая структуру (270) и то, что эта формула при  $a = 0$  превращается в (259), можно считать, что первое слагаемое описывает приращение прогиба, являющееся следствием обратимой части деформации ползучести, второе — необратимой. Таким образом, и для рассматриваемого стержня критическая сила при длительном действии нагрузки в сформулированном выше смысле определяется формулой (262), т. е. зависит только от величины обратимой части деформации ползучести.

На рис. 40 показаны построенные по формулам (253), (255) кривые развития во времени перемещений сжатого высыхающего и невысыхающего деревянных стержней. Считалось, что стержни имеют прямоугольные поперечные сечения  $h \times b$ , гибкость  $l/h = 35$ , начальную погибь  $f_0/h = 0,05$  и шарнирное опирание по концам; предпола-

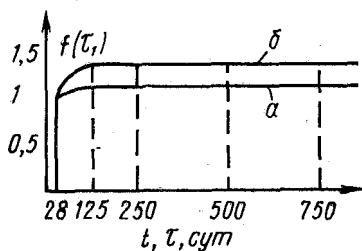


Рис. 40. Перемещения во времени сжатого деревянного стержня, имеющего начальную погибь. Начальная влажность  $W=20\%$ ,  $P/P_0=0,2$   
 а — при отсутствии высыхания; б — при высыхании

галось, что деформативные свойства деревянного стержня соответствуют данным, приведенным на рис. 25.

Решение, полученное для шарнирно-опертого по концам стержня, допускает существенное обобщение. Уравнение (247) при  $\tau_1 = t$  выделяет уравнение упругомгновенной задачи, содержащее в правой части  $y_0''(z, t)$ . Последнее позволяет получить такую зависимость:

$$\frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2} + \frac{P}{J} \left[ \frac{y(z, t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t y^*(z, \tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = \\ = \frac{\partial^2 y(z, t)}{\partial z^2} + \frac{P}{E(t)J} y(z, t). \quad (271)$$

Из этого следует, что если условия опирания не зависят от ползучести, т. е. полностью описываются решением упругомгновенной задачи, то связь между  $y^*(z, t)$  и  $y(z, t)$  устанавливается с помощью уравнения (271). Поскольку зависимость между  $y^*(z, t)$  и перемещениями в стержнях в момент приложения нагрузки  $y(z, \tau_1)$  имеет такой же вид, как (271), то при условиях опирания, отличных от шарнирных, но не связанных с ползучестью, справедливы формулы (253), (255) и (262). Особенности опирания учитываются только при определении  $P_0$  и  $f(\tau_1)$ . Если решение упругой задачи разыскивается в рядах, все сказанное относится к одному члену ряда.

Как было показано в п. I гл. IV, к условиям на поверхности, не зависящим от ползучести, может быть отнесен и случай, когда на поверхности имеются связи, обладающие такими же характеристиками деформативности, как в рассматриваемом теле. Поэтому выводы, основанные на уравнении (271), относятся и к длительным перемещениям плоских систем (рам, неразрезных балок), все стержни которых обладают одинаковыми  $E$  и  $C(t, \tau)$ .

**О некоторых особенностях формул (253), (255) и (262) и их практическом применении.** Из сказанного ранее и формул (259), (261) и (270) отчетливо видно, что для рассматриваемых стержней критерий потери устойчивости при длительном действии нагрузки может быть представлен в виде<sup>1</sup>:

$$t \rightarrow \infty, \quad f^*(t) \rightarrow \infty, \quad \frac{df(t)}{dt} \rightarrow \text{const}. \quad (272)$$

<sup>1</sup> В частном случае меры ползучести (70) при  $A = 0$ ,  $f^* = \text{const}$  [см. (259)].

Нетрудно заметить, что этот критерий находится в противоречии со второй зависимостью (243), приемлемой при относительно малых кривизнах, и связан с деформированием в области, где неприменима линейная теория ползучести. Поэтому следует считать, что критерий (272) носит условный характер и определяет только тенденции в развитии деформирования.

С другой стороны, очевидно, что при длительном действии силы  $P$ , близкой по значению к  $P_d$  ( $P < P_d$ ), перемещение хотя и носит затухающий характер, но может быть сколь угодно большим. Поэтому несущая способность стержня, обладающего линейной ползучестью, всегда определяется не устойчивостью, а прочностью; сила  $P_d$  является только оценкой несущей способности сверху (см. п. 6 гл. VI). Потеря несущей способности после конечного промежутка времени действия постоянной нагрузки, вследствие потери устойчивости, возможна только при наличии нелинейной составляющей деформации ползучести (см. п. 4 гл. V).

Естественно, что проверка прочности сжатых стержней, используемых в строительных конструкциях, должна выполняться по деформированной схеме, т. е. с учетом влияния перемещений, сформировавшихся при длительном действии нагрузки  $t = \infty$  и имеющих затухающий характер ( $P < P_d$ ). Возможность применения формул (253), (255) и (260) для определения таких перемещений связана как с их экспериментальным подтверждением в области линейной ползучести, так и со степенью развития нелинейной составляющей ползучести к моменту разрушения стержня, выполненного из того или иного материала. К сожалению, авторам неизвестны экспериментальные данные о длительной несущей способности однородных и изотропных сжатых стержней. Поэтому для определенной ориентировки на рис. 41 приведены кривые развития горизонтальных перемещений двутавровых стержней, изготовленных из оргстекла, имеющих различные начальные погиби  $f_0$  из плоскости стенки и загруженных по концам постоянными изгибающими моментами  $M$ , действующими в плоскости стенки (потеря плоской формы изгиба)<sup>1</sup>. Рисунок позволяет сделать такие выводы: а) при  $M \leq M_d$  кривые, рассчитанные с помощью теории, опирающейся на те же предпосылки, что и формулы (253) и (255) [90, 3], хорошо соответствуют

<sup>1</sup> Кривые построены В. М. Корбинцем (Одесский инженерно-строительный институт).

экспериментальным; б) при  $M > M_d$  резко изменяется характер развития перемещений, т. е. критический момент при длительном действии нагрузки  $M_d$  отчетливо разграничивает области затухающего и незатухающего деформирования [см. (256) и (257)].

Возможность применения формул (253), (255) и (260) для описания длительного деформирования сжатых деревянных стержней связана с тем, что при сжатии вдоль волокон линейная зависимость между полными деформациями древесины  $\varepsilon^*$  и напряжениями  $\sigma$  справедлива при  $\sigma < R_d$ . Анализ показал, что формулы, основанные на линейной теории ползучести, даже при относительно высоких нагрузках приводят к значениям перемещений сжатых железобетонных стержней, вполне удовлетворительно соответствующих экспериментальным (см. табл. 24).

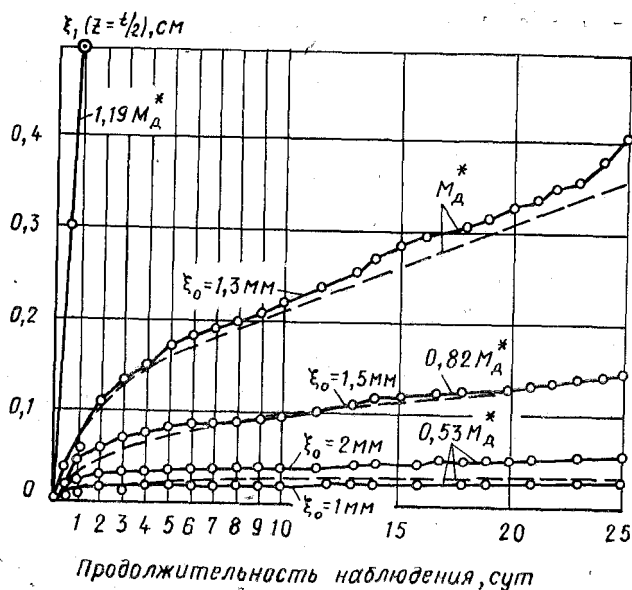


Рис. 41. Кривые развития перемещений во времени из плоскости стенки двутавровых стержней, выполненных из оргстекла  
 $M_d$  — критический момент при длительном действии нагрузки, рассчитанный по линейной теории ползучести;  $\xi_0$  — начальная погибь; — — — экспериментальные данные; — — — расчет

## 5. ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Анализ возможных равновесных состояний. При решении вопросов, связанных с устойчивостью некоторых элементов тонкостенных строительных конструкций, в частности оболочек, приходится учитывать возможность развития достаточно больших, как говорят, конечных перемещений. При соответствующих уровнях нагрузок такие перемещения в упругой стадии способны приводить к переходам в новые равновесные состояния, причем эти переходы носят скачкообразный характер [27]. Устойчивость элементов этого типа характеризуется двумя критическими силами: верхней  $P_v$  и нижней  $P_n$ .

Для уяснения влияния ползучести на устойчивость элементов этого типа рассмотрим простейшую стержневую систему, изображенную на рис. 42 [62]. Система состоит из двух жестких стержней  $FA$  и  $AD$ , скрепленных шарниром  $A$  и усиленных связями  $AC$  и  $AB$ , расположенными в плоскости, перпендикулярной прямой  $FD$ . В точках  $F$  и  $D$  стержни

закреплены шарнирно. Система сжата двумя постоянными во времени статическими приложенными силами  $P$ , направленными по прямой  $FD$ . Считается, что перемещение  $f_1$  ( $f_1 = f - f_0$ ) шарнира  $A$  возможно только в направлении  $K$ . Как шарнир  $A$ , так и связи  $AC$  и  $AB$  обладают упругими свойствами и ползучестью, описываемой зависимостями линейной наследственной теории старения. Поскольку для реальных конструкций характерны несовершенства, можно предполагать, что система имеет начальную прогибь  $f_0$ .

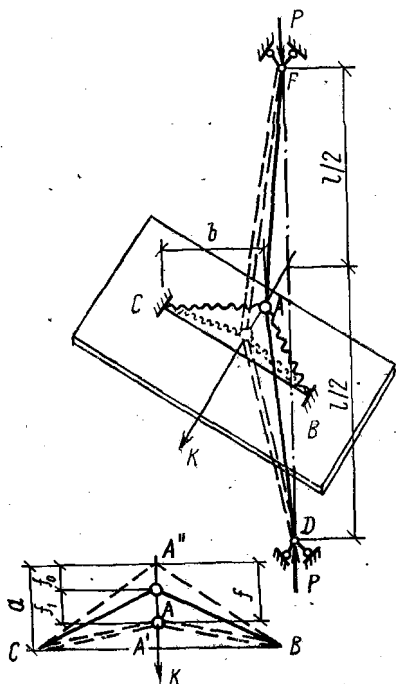


Рис. 42. Простейшая стержневая система, способная к скачкообразному переходу в новое равновесное состояние

Решение упругой задачи рассматривается в предположении, что упругими свойствами обладают шарнир  $A$  и связи  $AC$  и  $AB$ , причем жесткость шарнира  $A$ , равная

$$\bar{c} = (P_0 l) / 4, \quad (273)$$

подобрана таким образом, чтобы при отсутствии связей и начального прогиба критическая сила равнялась эйлеровой.

Для решения поставленной задачи при длительном действии нагрузки зависимость между напряжениями  $\sigma^*(t)$  и деформациями  $\epsilon^*(t)$  удобнее записать в виде (102). Тогда равнодействующую усилий в связях  $AC$  и  $AB$  определим по формуле

$$Q^*(t) \approx \frac{FE(t)}{b^3} \left\{ \left[ f^{*3}(t) - 3af^{*2}(t) + f^*(t) [2a^2 + 2af_0 - f_0^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + af_0(f_0 - 2a) \right] + [a - f^*(t)] \int_{\tau_1}^t [2af^*(\tau) - f^{*2}(\tau) - \right. \\ \left. - f_0(2a - f_0)] R(t, \tau) d\tau \right\}, \quad (274)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения связи.

Момент сил, приложенных к одному звену системы относительно шарнира  $A$ , выражается так:

$$M = Pf^*(t) - \frac{FE(t)}{4b^3} l \left\{ \left[ f^{*3}(t) - 3af^{*2}(t) + f^*(t) [2a^2 + 2af_0 - f_0^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + af_0(f_0 - 2a) \right] + [a - f^*(t)] \int_{\tau_1}^t [2af^*(\tau) - f^{*2}(\tau) - \right. \\ \left. - f_0(2a - f_0)] R(t, \tau) d\tau \right\}. \quad (275)$$

В связи с тем, что шарнир  $A$ , помимо упругих свойств, обладает еще и ползучестью, зависимость между моментом в шарнире  $A$  и дополнительным углом поворота  $\varphi_1$  в соответствии с (102) необходимо представить в виде

$$M^*(t) = \bar{c} \left[ \varphi_1^*(t) + \int_{\tau_1}^t \varphi_1^*(\tau) R(t, \tau) d\tau \right], \quad (276)$$

где

$$\varphi_1^*(t) = 4[f^*(t) - f_0] / l. \quad (277)$$

Подставив в (276) значения  $M$ ,  $\bar{c}$  и  $\varphi_1$  согласно (275), (277) и (273), можно после несложных преобразований записать интегральное уравнение, связывающее значение

сжимающей нагрузки  $\bar{P}$  с полным прогибом  $f^*(t)$ , вычисленным с учетом ползучести и старения

$$P f^*(t) = P_0(t) \left\{ f^*(t) - \int_{\tau_1}^t f^*(\tau) R(t, \tau) d\tau - f_0 \left[ 1 - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] \right\} + \\ + \eta(t) [a - f^*(t)] \left\{ 2a \left[ f^*(t) - \int_{\tau_1}^t f^*(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] - \right. \\ \left. - \left[ f^{*2}(t) - \int_{\tau_1}^t f^{*2}(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] + (f_0^2 - 2af_0) \left[ 1 - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] \right\}, \quad (278)$$

где

$$\eta(t) = \frac{E(t) Fl}{4b^3}. \quad (279)$$

Уравнение (278) позволяет построить поверхность перемещений  $f^* = f^*(P, t)$ . Следы от сечений этой поверхности плоскостями, перпендикулярными оси  $t$ , являются кривыми равновесных состояний, соответствующими различным продолжительностям действия нагрузок. Сечения поверхностями, нормальными к оси  $P$ , представляют положения системы в различные моменты времени при определенных уровнях длительно действующих нагрузок.

Для расчета элементов строительных конструкций в первую очередь необходимо иметь представления о равновесных состояниях в момент приложения нагрузки  $t = \tau_1$  и после окончания процесса деформирования, вызванного длительным действием постоянной нагрузки, т. е. при  $t = \infty$ .

Для  $t = \tau_1$  из (278) выделяется нелинейное алгебраическое уравнение, имеющее в безразмерных параметрах вид

$$\bar{P} = 1 - \frac{\zeta_0}{\zeta} + \bar{K} \left[ \zeta^2 - 3\zeta + 2 + \vartheta \left( 1 - \frac{1}{\zeta} \right) \right], \quad (280)$$

где

$$\bar{P} = \frac{P}{P_0(\tau_1)}, \quad \zeta = \frac{f(\tau_1)}{a}, \quad \zeta_0 = \frac{f_0}{a}, \quad \vartheta = 2\zeta_0 - \zeta_0^2; \\ \bar{K} = \frac{E(\tau_1) Fla^2}{4P_0(\tau_1) b^3}. \quad (281)$$

Из этого уравнения при  $f_0 = 0$  следует известное уравнение устойчивости рассматриваемой системы без начальной погиби [27]. Полученное уравнение представляет возможные равновесные состояния системы в упругой стадии при статическом приложении силы  $P$  (кривая 1 на рис. 43).

Для изучения равновесных состояний при  $t = \infty$  будем считать, что оболочка выполнена из нестареющего материала и примем резольвенту, представленную в 1-й строке табл. 13. При такой резольвенте сложение уравнения (278), предварительно умноженного на  $r = \gamma_1 (1 + \varphi)$ , с уравнением, полученным путем дифференцирования

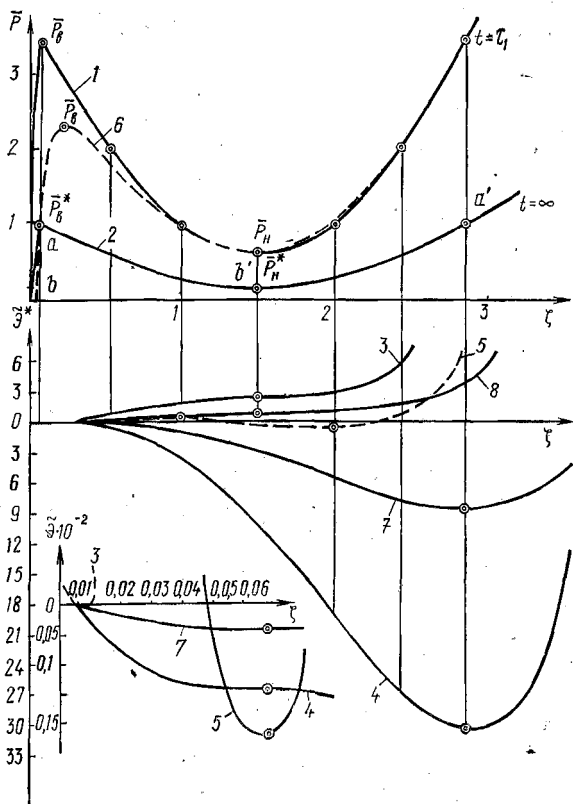


Рис. 43. Кривые равновесных состояний и изменения полной потенциальной энергии для нелинейно деформирующейся системы с характеристиками:  $\xi_0 = 0,005$ ;  $\varphi = 2,535$ ;  $K = 1,5$



(278) по  $t$ , позволяет получить интегро-дифференциальное уравнение

$$P [\dot{f}^*(t) + r f^*(t)] = P_0 [\dot{f}_1^*(t) + \gamma_1 f^*(t)] - \dot{f}^*(t) F(t) + \\ + \eta [a - f^*(t)] \{2a [\dot{f}^*(t) + \gamma_1 f^*(t)] - [2f^*(t) \dot{f}^*(t) + \\ + \gamma_1 f^{*2}(t)] + \gamma_1 (f_0^2 - 2af_0)\} - P_0 \gamma_1 f_0, \quad (282)$$

где  $F(t)$  — функция, стоящая во вторых фигурных скобках правой части (278),  $\eta = (EFl)/4b^3$ .

Условия конечности перемещений

$$t \rightarrow \infty, \dot{f}^*(t) \rightarrow \text{const}, f_1^* \rightarrow 0 \quad (283)$$

приводят к выделению из (282) алгебраического уравнения, связывающего значения силы  $\bar{P} = P/P_0$  и перемещения  $\zeta^*(\infty) = f^*(\infty)/a$  после окончания деформирования

$$(1 + \varphi) \bar{P} = 1 - \frac{\zeta_0}{\zeta^*(\infty)} + \bar{K} \left\{ \zeta^{*2}(\infty) - 3\zeta^*(\infty) + \right. \\ \left. + 2 + \vartheta \left[ 1 - \frac{1}{\zeta^*(\infty)} \right] \right\}. \quad (284)$$

Уравнение (284) позволяет построить кривую равновесных состояний системы при  $t = \infty$  аналогично тому, как уравнение (280) дает возможность получить такую же кривую для  $t = \tau_1$ .

Нетрудно заметить, что уравнение (284) отличается от уравнения соответствующей упругомгновенной задачи (280) только наличием множителя  $(1 + \varphi)$  в левой части; характер кривых зависимости  $\bar{P}(\zeta)$  (рис. 43) упругомгновенной задачи (кривая 1) и задачи, решаемой с учетом ползучести при  $t = \infty$  (кривая 2), идентичен; экстремальным значениям сжимающих сил, определяемых уравнениями (280) и (284), соответствуют одинаковые прогибы.

При расчете рассматриваемой системы в упругой стадии, на основании анализа полной энергии в различных возможных состояниях [27], принято называть: верхней критической [приведенной верхней критической, см. (281)]  $\bar{P}_в$  — силу, соответствующую первому экстремальному значению на кривой 1 (рис. 43); нижней критической (приведенной нижней критической)  $\bar{P}_н$  — силу, соответствующую второму экстремальному значению на той же кривой.

Применительно к элементам строительных конструкций проектируемым исходя из неограниченно большого срока

эксплуатации, по аналогии с определениями критических сил, принятыми для упругой стадии ( $t = \tau_1$ ), критическими при длительном действии нагрузки ( $t = \infty$ )  $P_B^*$  и  $P_H^*$  можно считать силы, соответствующие экстремальным ординатам кривой 2 на рис. 43. Сравнение уравнений (284) и (280) показывает наличие зависимостей

$$\bar{P}^* = \frac{\bar{P}_B}{1+\varphi}; \quad \bar{P}_H^* = \frac{\bar{P}_H}{1+\varphi}. \quad (285)$$

Таким образом, для рассматриваемой системы, выполненной из нестареющего материала, обладающего ползучестью, критические силы при длительном действии нагрузки могут определяться по формулам упругомгновенной задачи с предварительной заменой модуля упругомгновенных деформаций модулем обратимых деформаций [см. (264),  $c = \varphi$ ].

**Анализ возможностей перехода к новым равновесным формам.** В упругой стадии условия перехода нелинейно-деформирующихся систем к новым равновесным состояниям, т. е. условия, при которых возможна потеря устойчивости в «большом», выявляются путем рассмотрения изменения полной потенциальной энергии системы на возможных перемещениях [27]. С этими условиями связаны формулировки понятий критических сил. Естественно, что подобный анализ необходимо провести и для системы, обладающей ползучестью. С точки зрения расчета строительных конструкций этот анализ в первую очередь должен быть выполнен применительно к равновесным состояниям, формирующимся как в процессе загрузки, т. е. при  $t = \tau_1$ , так и после окончания развития перемещений, т. е. для  $t = \infty$ .

Полная потенциальная энергия в системе, изображенной на рис. 43, состоит из суммы потенциальных энергий, связанных с деформациями двух пружин  $2\Pi_{\text{пр}}$  и шарнира  $\Pi_{\text{ш}}$ , а также энергий от перемещений двух сил  $P$ , —  $2\Pi_P$

$$\Pi_{\text{пр}} = 0,5 S_{\text{пр}} \Delta b; \quad \Pi_{\text{ш}} = 0,5 M \varphi_1; \quad \Pi_P = P (f^2 - f_0^2) / l, \quad (286)$$

где  $S_{\text{пр}}$  и  $\Delta b$  — усилие в пружине и приращение ее длины;  $M$  и  $\varphi_1$  — момент в шарнире и соответствующий угол поворота.

Если для упругой стадии выразить  $S_{\text{пр}}$ ,  $\Delta b$ ,  $M$  и  $\varphi$  через  $f$ ,  $E$  и характеристики системы, то формулу для полной потенциальной энергии  $\mathcal{E}$ , при отсутствии старения, можно представить так [92]:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{K} (\zeta^2 - \zeta_0^2)^2 - 4\bar{k} (\zeta^2 - \zeta_0^2) (\zeta - \zeta_0) + (4\bar{k} + 2) (\zeta - \zeta_0)^2 - 2\bar{P} (\zeta^2 - \zeta_0^2) \quad (287)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} / P_3 a^2,$$

где  $\bar{K}$  — согласно (281).

Для наглядности изложения, на рис. 43 представлены кривые изменения полной потенциальной энергии, построенные по формуле (287) и относящиеся к конкретной системе, обладающей параметрами  $\bar{K} = 1,5$ ,  $\zeta_0 = 0,005$ . В частности, изображены кривые изменения энергии для случаев действий нагрузок  $\bar{P}_H$  (кривая 3) и  $\bar{P}_B$  (кривая 4) при мгновенных перемещениях.

Для  $\bar{P} = \bar{P}_H$  в данном случае равно 0,6266, минимальный уровень энергии соответствует состоянию, к которому система приходит в процессе загрузки. Это состояние устойчиво как в малом, так и в большом. Система также может находиться в состоянии, которому на графике изменения уровня полной энергии соответствует точка перегиба с горизонтальной касательной. Это равновесное состояние безразлично в малом и неустойчиво в большом, так как уровень энергии ниже в первом равновесном состоянии. Переход ко второму состоянию может осуществляться только в случае мгновенного введения дополнительной энергии.

Для  $\bar{P} = \bar{P}_B = 3,42$  кривая изменения уровня полной энергии имеет горизонтальную касательную и точку перегиба в точке, соответствующей первому равновесному состоянию. Это состояние безразлично в малом и неустойчиво в большом, поскольку минимальный уровень энергии соответствует второму равновесному состоянию.

При изучении влияния ползучести на устойчивость в большом прежде всего нужно рассматривать возможности мгновенных переходов к новым равновесным состояниям из состояний, в которых оказалась система в результате развития деформаций ползучести. При этом необходимо учитывать изменение геометрических характеристик упругой системы в частности начальной погиби, в процессе ползучести. Новая начальная погибь  $\zeta_0$  может быть получена с помощью (280), поскольку действующая сила  $P$  является заданной, а  $\zeta$  считается равной полному перемещению, накапливаемому в течение неограниченного промежутка времени.

Для стержневой системы с начальной погибью  $\zeta_0 = 0,005$  и  $\bar{P} = \bar{P}_B^* = 0,9681$  перемещение, формирующееся в течение неограниченно большого периода времени, соответ

ствующее вершине кривой равновесных состояний, составляет  $\zeta^* = 0,0681$ . Такое перемещение упругая система может получить при нагрузке, равной  $P_v^*$ , если ее начальная погибь  $\zeta_0 = 0,0499$ .

На рис. 43 приведены кривые изменения потенциальной энергии (кривая 5) для упругой стержневой системы с начальной погибью  $\zeta_0 = 0,0499$ . Как видно из рисунка, характер кривых изменения потенциальной энергии указывает на невозможность мгновенного перехода в новое равновесное состояние. При отклонении вправо от состояния равновесия, соответствующего вершине кривой 2, происходит увеличение энергии; состояние устойчиво как в малом, так и в большом.

Мгновенный переход в новое равновесное состояние может осуществиться, если после окончания процесса ползучести увеличить нагрузку до значения  $\bar{P}$ , причем  $\bar{P}_v^* < < \bar{P} < \bar{P}_v$ . Связано это с тем, что согласно (280) верхняя критическая сила  $\bar{P}_v$  уменьшается при увеличении начальной погиби. Так, для рассматриваемой стержневой системы эта нагрузка должна быть увеличена с  $\bar{P}_v^* = 0,9681$  до  $\bar{P} = 2,3376$  (кривая 6 на рис. 43).

Поскольку длительное деформирование при действии силы  $\bar{P} = \bar{P}_v^*$  не приводит систему к мгновенно-неустойчивому состоянию в большом, то возникает вопрос об условиях реализации равновесного состояния на второй восходящей ветви, соответствующей достаточно отдаленному моменту времени  $t \rightarrow \infty$  (точка  $a'$  на кривой 2). По этому поводу можно привести такие соображения, сформулированные Н. А. Малаховой. Если учесть, что к моменту начала длительного деформирования действующая сила постоянна, то полная работа внешних и внутренних сил системы, вычисленная на действительных медленных перемещениях  $A^*$ , при  $t \rightarrow \tau_1$  уменьшается и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к величине, с точностью до знака равной  $|\bar{A}^*| = \bar{\Delta}/(1 + \varphi)$ , ( $\bar{P} = \bar{P}_v^*$ ) (кривая 7 на рис. 43). Иными словами, полная работа при длительном медленном движении системы, обладающей ползучестью, к равновесному состоянию постепенно уменьшается, так же как уменьшается полная потенциальная энергия в упругой системе при возможных перемещениях, происходящих в направлении второго равновесного состояния (при  $\bar{P} = \bar{P}_v^*$ ). Но поскольку при  $t \rightarrow \infty$  кривая  $\bar{A}^*$  становится подобной кривой  $\bar{\Delta}$ , то при возможном<sup>1</sup> медлен-

ном движении вправо от положения, соответствующего точке  $a$ , не существует энергетического барьера. Поэтому при действии силы  $\bar{P} = \bar{P}_в^*$  возможность перехода системы в равновесное состояние, соответствующее точке  $a'$ , связана с возможностью неограниченно медленного движения вправо от точки  $a$  [92]. Естественно, что при действии длительно действующей силы, даже весьма незначительно превышающей  $\bar{P}_в^*$ , переход системы в новое равновесное состояние, т. е. потеря устойчивости в большом, осуществляется в течение конечного промежутка времени.

С аналогичных позиций может быть рассмотрен и вопрос об условиях реализации второго равновесного состояния при длительно действии силы  $\bar{P} = \bar{P}_н^*$  (точка  $b'$  на кривой 2). На рис. 43 изображена кривая  $\delta$  ( $\bar{P} = \bar{P}_н^*$ ), изменения полной работы  $|\bar{A}^*|$  при возможном весьма медленном движении вправо от точки  $b$  на кривой 2. В соответствии с ранее сказанным, кривая  $\delta$  аффинноподобна кривой 3, причем переходным коэффициентом является  $1/(1 + \varphi)$ . Поскольку при увеличении  $\zeta$  происходит увеличение  $|\bar{A}^*|$ , то переход системы путем весьма медленного движения в равновесное состояние, соответствующее точке  $b'$ , возможен только при постепенном введении дополнительной энергии.

Таким образом, на основании приведенных соображений можно считать, что нагрузка  $\bar{P} = \bar{P}_в^*$  является наименьшей, при которой переход системы в новое равновесное состояние принципиально возможен без дополнительной энергии. Соответственно нагрузка  $\bar{P} = \bar{P}_н^*$  является наименьшей, при которой возможно второе равновесное состояние, но это состояние может быть реализовано только при неограниченно медленном движении, обусловленном постепенным введением дополнительной энергии. Очевидно, что поскольку в элементах строительных конструкций реализация равновесного состояния  $b'$  практически нереальна, то при длительно действии нагрузки в качестве критерия устойчивости должна приниматься сила  $\bar{P}_в^*$ , а не  $\bar{P}_н^*$ .

Формулы (285) и качественная картина влияния линейной ползучести на устойчивость, описанная в этом параграфе, справедливы и для тонких оболочек [92] при решении задачи в первом приближении.

<sup>1</sup> Возможным с точки зрения кинематики системы; вопрос о реальности такого движения не обсуждается.

## ГЛАВА V

# НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

### 1. ГИПОТЕЗЫ И ПРЕДПОСЫЛКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА

Учитывая сложность описания процессов длительного деформирования при наличии значительного влияния нелинейной составляющей деформаций ползучести, в разное время были предприняты попытки создания общей формы зависимости напряжения — деформации [103, 108]. Однако попытки использовать эти зависимости для анализа опытных данных, предпринятые в нашей стране и за рубежом, пока оказались неудачными [103].

Параллельно с этим направлением создавалась теория, основанная на более простых и менее общих соотношениях, но позволяющая получить решения задач, выдвигаемых инженерной практикой.

Современная нелинейная феноменологическая теория ползучести стареющего тела строится на основании следующих гипотез и предпосылок: 1) рассматривается тело: однородное изотропное и удовлетворяющее условиям сплошности; 2) полные деформации тела, развивающиеся при длительном действии нагрузки, складываются из упругомгновенных деформаций  $\epsilon_y$ , линейной  $\epsilon_L$  и нелинейной составляющей деформаций ползучести  $\epsilon_H$ ; 3) для суммарных линейных деформаций (упругомгновенные деформации и линейная ползучесть) справедлив принцип наложения (см. п. 1 гл. III). Считается, что до момента  $\tau_1$  начала действия напряжений, от которых определяются деформации, напряжения в теле отсутствуют.

В соответствии со сказанным полные деформации, развившиеся при действии внешних сил к произвольному моменту времени  $t$  ( $t \geq \tau_1$ ), записываются в виде суммы:

$$\epsilon^*(t) = \epsilon_y(t) + \epsilon_L(t) + \epsilon_H(t). \quad (288)$$

Для случая сжатия или растяжения, в силу наличия для линейных деформаций зависимости (74), выражение (288) можно переписать [см. (4)] так [6, 7, 31]:

$$\epsilon^*(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \epsilon_H(t);$$
$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C_L(t, \tau). \quad (289)$$

В нелинейной феноменологической теории ползучести весьма существенными являются как способ разделения линейной и нелинейной составляющих ползучести, так методика аналитического описания нелинейной ползучести. Из условий (9), (10) и (60) отчетливо видно, что для достаточно полного описания экспериментальных данных методика представления  $\varepsilon_H$  должна строиться с учетом целого ряда особенностей длительного деформирования строительных материалов, проявляющихся при действии как постоянных так и переменных напряжений. В первую очередь речь идет о влиянии на величину ординат и характер кривых  $\varepsilon_H$  (уровня загрузки, возраста к моменту загрузки, продолжительности, режима и значения ранее действовавших напряжений).

## 2. НЕЛИНЕЙНАЯ НАСЛЕДСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ СТАРЕНИЯ

В нелинейной наследственной теории старения в дополнение к гипотезам и предпосылкам, сформулированным в п. 1, считается, что к нелинейной составляющей деформаций ползучести применим своеобразный принцип наложения [7, 23]. Принцип этот формулируется следующим образом: нелинейная составляющая деформации ползучести от данного приращения напряжений прямо пропорциональна приращению функции от этого напряжения и зависит от длительности действия этого приращения, но не зависит от величин и длительности действия других приращений напряжений.

При постоянных напряжениях  $\sigma$  ( $\tau_1$ ) принцип наложения приводит к формуле

$$\varepsilon_H(\sigma, t, \tau_1) = F_1[\sigma(\tau_1)] C_H(t, \tau_1). \quad (290)$$

При ступенчато возрастающих напряжениях  $\Delta\sigma$  ( $\tau_1$ ),  $\Delta\sigma$  ( $\tau_2$ ), ...,  $\Delta\sigma$  ( $\tau_n$ ) открывается возможность для определения  $\varepsilon_H(t)$  на основе семейства кривых  $C_H(t, \tau)$ , подобно тому как в линейной теории ползучести полные деформации были выражены с помощью  $\delta(t, \tau)$  (72)

$$\varepsilon_H(t) = F_1[\Delta\sigma(\tau_1)] C_H(t, \tau_1) + F_1[\Delta\sigma(\tau_2)] C_H(t, \tau_2) + \dots + F_1[\Delta\sigma(\tau_n)] C_H(t, \tau_n); t > \tau_n. \quad (291)$$

Последняя формула легко обобщается на случай напряжений, изменяющихся по произвольному закону,

$$\varepsilon_H(t) = F_1[\sigma(\tau_1)] C_H(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{dF_1[\sigma(\tau)]}{d\tau} C_H(t, \tau) d\tau. \quad (292)$$

Интегрирование по частям позволяет представить (292) в виде

$$\varepsilon_H(t) = - \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma(\tau)] \frac{\partial C_H(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (293)$$

Таким образом, в нелинейной наследственной теории старения в силу (289) и (293) основная физическая зависимость записывается так [6]:

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma(\tau)] \frac{\partial C_H(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (294)$$

причем для функции  $F_1(\sigma) = \sigma f_H(\sigma)$  удобно использовать первое выражение (13).

Имеется ряд предложений по описанию меры нелинейной составляющей ползучести бетона. Достаточно проработанными, в смысле методики описания, являются предложения, основанные на аппроксимации  $C_H(t, \tau)$  в виде функции (42) [6], при

$$F_1(\sigma) = b_m \sigma^{m+1}, \quad m > 1. \quad (295)$$

Поскольку при построении нелинейной теории принцип наложения принят для полных линейных деформаций (289) и для нелинейной составляющей ползучести, то он справедлив и для суммарных деформаций ползучести. Это позволяет при описании деформаций ползучести при постоянных напряжениях  $\sigma(\tau_1) = \text{const}$ , согласно (11), представить основную физическую зависимость в виде [7]

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (296)$$

Функцию  $F(\sigma) = \sigma f(\sigma)$ , входящую в это выражение, рекомендуется аппроксимировать с помощью формул (13), (14), (16) и (18), а также зависимостей [20, 23]

$$F(\sigma) = b \left( \frac{\sigma}{R} \right)^m; \quad F(\sigma) = a + b \left( \frac{\sigma}{R} \right)^m. \quad (297)$$



В гл. I (п. 2) при использовании выражения (18) приближенно учитываются различия в скоростях развития линейной и нелинейной составляющих ползучести. Там же рассмотрен вопрос о построении функций  $f_n[\sigma(\tau_1)]$  и  $f[\sigma(\tau_1)]$ , тогда как в (294) и (296) входят функции  $F_1[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau) f_n[\sigma(\tau)]$  и  $F[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau) f[\sigma(\tau)]$ . Очевидно, что  $f_n[\sigma(\tau)]$  и  $f[\sigma(\tau)]$  должны наилучшим образом описывать зависимости между  $C_n(\sigma, t, \tau)$  и  $C(\sigma, t, \tau)$  с одной стороны, и  $\eta = \sigma/R_{пр}$ , с другой, не при одном  $\tau = \tau_1$ , а при различных  $\tau$ . Практически такое описание достигается путем построения семейств кривых типа изображенных на рис. 4 и 6 при нескольких  $\tau_i$  и соответствующего подбора функций [68].

Полезно учитывать и следующее обстоятельство, связанное с применением выражения (14). Из формулы (14) и табл. I видно, что значение  $\beta_1$  для бетона зависит от относительного уровня напряжений в момент приложения нагрузки  $\eta(\tau_1) = \sigma(\tau_1)/R_{пр}(\tau_1)$ . Для случая  $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_1) = \text{const}$  это не вызывает каких-либо затруднений, поскольку выражение, стоящее в (14) в квадратных скобках, постоянно во времени.

При наличии переменных напряжений значение  $\beta_1$  в первом приближении может определяться при значении  $\sigma(\xi)$ , среднем в промежутке времени  $\tau_1 - t$ .

Более корректный учет влияния нелинейности при переменных напряжениях может быть выполнен путем построения с помощью табл. I (или аналогичной таблицы для другого материала) зависимости  $\beta_1 = \beta_1(\eta)$  или, при  $R_{пр}(\tau_1) = R_{пр} = \text{const}$ , зависимости  $\beta_1 = \beta_1(\sigma)$ . В частности, если аппроксимировать функцию  $\beta_1(\sigma)$  в виде полинома второй степени

$$\beta_1(\sigma) = \beta_{10} + \beta_{11}\sigma + \beta_{12}\sigma^2, \quad (298)$$

то выражение (14) позволяет получить формулу

$$F[\sigma(\tau)] = [1 + \beta_{10}\sigma(\tau) + \beta_{11}\sigma^2(\tau) + \beta_{12}\sigma^3(\tau)]\sigma(\tau), \quad (299)$$

учитывающую влияние на  $F[\sigma(\tau)]$  изменения напряжений во времени.

Выражения (294) и (296), построенные на основании применения принципа наложения как к линейным, так и к нелинейным составляющим деформаций ползучести, позволяют получить решения ряда задач, имеющих существенное значение для проектирования конструкций. Однако в силу того же принципа наложения класс решаемых задач

и полнота соответствия решений экспериментальным данным в некоторых случаях ограничены (сложные режимы изменения внешних воздействий во времени, весьма высокие напряжения). В целом в отношении возможностей описания влияния режимов напряженных состояний, переменных во времени, нелинейная наследственная теория старения существенно не отличается от линейной. Обе теории прежде всего применимы для описания деформирования в случаях монотонного и медленного уменьшения или увеличения напряжений, а также медленного и монотонного увеличения напряжений с таким же последующим снижением.

Имеется ряд предложений по уточнению и совершенствованию зависимостей напряжения — деформации в нелинейной теории ползучести. В книге [20] уравнение (296) обобщается на случай нелинейности упругомгновенных деформаций

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} F_M[\sigma^*(t)] - \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) F_n[\sigma^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C^*(t, \tau) d\tau, \quad (300)$$

где  $F_M[\sigma^*(t)]$  и  $F_n[\sigma^*(\tau)]$  — нелинейные функции напряжения типа (297);  $C^*(t, \tau)$  — мера ползучести в форме [1]

$$C^*(t, \tau) = C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}. \quad (301)$$

С целью описания трех характерных участков кривых длительного деформирования при высоких напряжениях в работе [28] построено уравнение (см. рис. 2)

$$\varepsilon^*(t) E(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) K_1(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma(\tau)] K_2(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t F_2[\sigma(\tau)] K_3(t, \tau) d\tau, \quad (302)$$

в котором, по замыслу автора, второе слагаемое представляет линейную ползучесть, третье — затухающую составляющую нелинейной ползучести, четвертое — незатухающую составляющую линейной ползучести.

Обобщая ранее сделанные рекомендации, А. Р. Ржаницын предложил принимать основную зависимость нелинейной ползучести в виде [108]

$$E(t) \varepsilon^*(t) = \sigma^*(t) - \int_{\tau_1}^t K[\sigma(\tau), t, \tau] d\tau, \quad (303)$$

где

$$K[\sigma(\tau), t, \tau] = \sum_{i=1}^{i=n} f_i[\sigma(\tau)] K_i(t, \tau). \quad (30)$$

Разработке теории ползучести, не использующей принцип наложения в обычной форме, посвящены, в частности статьи [24, 29, 31, 34].

### 3. РЕШЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СТАРЕНИЯ

Поскольку предполагается, что вынужденные деформации  $\varepsilon_0(t)$  постоянны по поперечным сечениям, то напряженное состояние формируется только под действием связей, препятствующих продольным деформациям стержня. Поэтому в поперечных сечениях, несколько удаленных от торцов, будут возникать только нормальные напряжения, постоянные по поперечному сечению и по длине. Вследствие ползучести эти напряжения даже при вынужденных деформациях  $\varepsilon_0(t)$ , постоянных во времени, затухают или, как говорят, релаксируют (см. п. 3 гл. III).

Если считать, что зависимость между деформациями, вызвавшими их напряжениями описывается формулой (294), то полные деформации могут быть представлены та

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma^*(\tau)] \frac{\partial C_H(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_0(t). \quad (30)$$

Далее необходимо учесть, что, во-первых, в рассматриваемом случае в силу наличия жестких связей на концах стержня полная деформация  $\varepsilon^*(t)$  равна нулю, во-вторых, решение упругомгновенной задачи определяется согласно (96) при  $\tau_1 = t$ . Все это позволяет приравнять нулю правую часть (305) и получить для разыскания  $\sigma^*(t)$  такое нелинейное интегральное уравнение:

$$\sigma^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - E(t) \int_{\tau_1}^t F_1[\sigma^*(\tau)] \frac{\partial C_H(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma(t). \quad (31)$$

При использовании зависимости (296) уравнение для  $\sigma^*(t)$  принимает вид

$$\sigma^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau - E(t) \int_{\tau_1}^t F[\sigma^*(\tau)] \times \\ \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma(t). \quad (307)$$

Построение решений уравнений типа (306) и (307) в аналитической форме, в случае зависимостей  $C_{\text{л}}$ ,  $C_{\text{н}}$  или  $C$  от  $t$  и  $\tau$ , связано с серьезными трудностями математического характера. Поэтому рационально решение, например, уравнения (306) выполнять в численной форме. Используя способ, описанный в п. 6 гл. III [см. (139), (140)], можно показать справедливость равенства

$$\overrightarrow{(1 - EK_{\text{л}} - EK_{\text{н}})} \sigma_0^* = \Delta \delta \overrightarrow{\sigma_0^*} + \Delta C_{\text{н}} \overrightarrow{F_1(\sigma_0^*)}. \quad (308)$$

Это равенство связывает вектор функций, получающийся после применения к  $\sigma_0^*(t)$  оператора, стоящего в левой части уравнения (306), сумму произведений треугольных матриц, характеризующих деформативные свойства тела, и соответственно векторов напряжений и функций напряжений. Матрица  $\Delta \delta$  вычисляется согласно (141) и (142), матрица  $\Delta C_{\text{н}}$  по тем же формулам с предварительной заменой  $\delta$  на  $C_{\text{н}}$ .

При вычислении этих матриц, как и в случае, описанном в п. 6 гл. III, приходится пользоваться приближенными формулами:

$$\delta(t_i, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k} = \delta \left( t_i, \frac{t_k + t_{k-1}}{2} \right); C_{\text{н}}(t_i, \xi)_{t_{k-1}}^{t_k} = C_{\text{н}} \left( t_i, \frac{t_k + t_{k-1}}{2} \right). \quad (309)$$

На основании (308) нелинейное интегральное уравнение (306) можно представить в виде матричного уравнения

$$\Delta \delta \overrightarrow{\sigma^*} + \Delta C_{\text{н}} \overrightarrow{F_1(\sigma^*)} = \overrightarrow{\sigma}, \quad (310)$$

где  $\overrightarrow{\sigma}$  — вектор, элементами которого являются решения упругомгновенной задачи [см. (135)].

Если функция напряжений  $F_1$  аппроксимируется в виде полинома, то в развернутом виде (310) записывается как система нелинейных алгебраических уравнений. Решение этих уравнений в силу треугольной формы матриц выполняется последовательно.

Для иллюстрации такого способа определения напряжений и влияния нелинейной составляющей ползучести табл. 19 представлены коэффициенты затухания напряжений, возникающих в жестко заделанном по концам бетонной стержне при стационарном нагреве, начиная с возраста  $\tau_1 = 7$  сут, на  $\theta = 32,4^\circ\text{C}$  [ $\sigma(7) = 0,7 R_{пр} = 8,4$  МПа]. Считалось, что стержень выполнен из бетона, исследованного в опытах [6]. Функции  $C_{л}(t, \tau)$ ,  $C_{н}(t, \tau)$  и  $E(\tau)$ , характеризующие деформативные свойства бетона [образец  $7 \times 7 \times 60$  см, состав 1 : 2,27 : 4,02 (по массе) — портландцемент, кварцевый песок, известковый щебень крупностью 5—15 мм, В/Ц = 0,59,  $R \approx 30$  МПа], аппроксимировались применительно к формулам (42) и (43) с использованием таких вспомогательных зависимостей и коэффициентов [6]:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{л}(\tau) &= (13,4 + 12,35e^{-0,069\tau} + 45,7e^{-0,45\tau}) 10^{-6} \text{ (МПа)}^{-1}; \\ \Delta_{л}(\tau) &= (1,5 + 22,6e^{-0,55\tau}) 10^{-6} \text{ (МПа)}^{-1}; \\ \gamma_{л} &= 0,04 \text{ (сут)}^{-1}; \lambda_{л}(t-\tau) = e^{-5(t-\tau)}, B_{л} = 0,9; \\ \theta_{н}(\tau) &= (0,3 + 1,52e^{-0,066\tau} + 14,5e^{-0,36\tau}) 10^{-8} \text{ (МПа)}^{-1}; \\ \Delta_{н}(\tau) &= (0,29 + 1,31e^{-0,064\tau} + 17,67e^{-0,47\tau}) 10^{-8} \text{ (МПа)}^{-1}; \\ \gamma_{н} &= 0,04 \text{ (сут)}^{-1}; \lambda_{н}(t-\tau) = e^{-5(t-\tau)}; B_{н} = 0; \\ E &= 3,30 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \beta_1 = 0,239; \beta_2 = 0,609; \alpha_1 = 0,033 \text{ 1/сут}; \\ \alpha_2 &= 0,26 \text{ 1/сут}, F_1[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau) f_{н}[\sigma(\tau)], \\ f[\sigma(\tau)] &= [\sigma(\tau)]^{1,6}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (31) \\ (312^{**}) \end{array}$$

В соответствии с определением все коэффициенты  $H^*(t_i, \tau)$  вычислялись как отношения  $\sigma^*(t_i)/\sigma(\tau_1)$ . При определении  $H_{н}^*$  напряжения  $\sigma^*(t_i)$  вычислялись по (310), при определении  $H_{л}^*$  и  $H_{л}^{н*}$  — по формулам (137) и (147); предполагалось: в первом случае, что деформации ползучести равны только линейной составляющей; во втором, что нелинейные деформации относились к линейным путем сложения элементов матрицы  $\Delta\delta$  и матрицы  $\Delta C_{н}$ , предварительно умноженной на  $[\sigma(7)]^{1,6}$ .

Как видно из табл. 19, наличие составляющей нелинейной деформации ползучести существенно увеличивает затухание напряжений. Однако если считать, что все деформации

\* Функции с индексом «л» относятся к аппроксимации  $C_{л}(t, \tau)$ , с индексом «н» — к  $C_{н}(t, \tau)$ .

\*\* Напряжение  $\sigma(\tau)$  в последнем равенстве должно рассматриваться как безразмерная величина [см. (13)].

Таблица 19. Коэффициенты затухания напряжений в бетонном стержне, вычисленные по нелинейной и линейным теориям

| $t$ , сут | $H_N^*$ | $H_L^*$ | $H_L^{H^*}$ | $\frac{H_L^{H^*}}{H_N^*}$ | $\frac{H_L^{H^*}}{H_N^*}$ |
|-----------|---------|---------|-------------|---------------------------|---------------------------|
| 7         | 1,000   | 1,000   | 1,000       | 1,000                     | 1,000                     |
| 10        | 0,601   | 0,822   | 0,509       | 1,367                     | 0,847                     |
| 14        | 0,547   | 0,734   | 0,459       | 1,34                      | 0,84                      |
| 28        | 0,461   | 0,629   | 0,379       | 1,365                     | 0,823                     |
| 60        | 0,420   | 0,596   | 0,333       | 1,42                      | 0,793                     |
| 90        | 0,413   | 0,591   | 0,326       | 1,43                      | 0,789                     |
| 120       | 0,412   | 0,590   | 0,325       | 1,43                      | 0,789                     |
| 150       | 0,412   | 0,590   | 0,325       | 1,43                      | 0,789                     |
| 300       | 0,412   | 0,590   | 0,325       | 1,43                      | 0,789                     |
| 400       | 0,412   | 0,590   | 0,321       | 1,33                      | 0,789                     |

ции ползучести линейны, как это сделано при вычислении  $H_L^H$ , то степень затухания напряжений преувеличена. Последнее связано с искусственным удержанием в функции  $F_1 [\sigma_0^*(\tau)]$  (295) на протяжении всего процесса напряжения  $\sigma$  (7). Фактически эта величина во времени уменьшается, что и учитывается уравнениями (306) и (310) (см. табл. 23).

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СТАРЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Для наглядности решения и наиболее полного выявления влияния нелинейной ползучести рассматривается стержень с поперечным сечением в виде «идеализированного двутавра»<sup>1</sup>, имеющий начальную погибь и сжатый постоянной силой  $P$  [91]. Деформации считаются малыми и изгиб предполагается только в плоскости стенки двутавра; нормальные напряжения по толщине полок постоянны. Зависимость между деформациями и напряжениями принимается в виде (296).

В качестве неизвестного принимается прогиб стержня  $y(x, t)$ , зависящий от координаты сечения  $x$  и времени  $t$ . Подставив выражение для  $\varepsilon^*(t)$  в формулу кривизны

$$\frac{1}{\rho(x, t)} = -\partial^2 [y(x, t) - y_0(x)] / \partial x^2 = [\varepsilon_1(x, t) - \varepsilon_2(x, t)] / h \quad (313)$$

<sup>1</sup> Двутавр, у которого нормальные напряжения воспринимаются только полками.

и используя равенство

$$\sigma_{1,2}(x, t) = PF^{-1} [0,5 \pm y(x, t)/h],$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \left\{ \frac{2P}{FhE(t)} y(x, t) - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2P}{Fh} y(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{E(\tau)} + F[\sigma_1(x, \tau)] - F[\sigma_2(x, t)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} = \\ = \partial^2 y_0(x) / \partial x^2, \end{aligned} \quad (314)$$

где  $h$  — высота «идеализированного» двутавра;  $F$  — площадь одной полки двутавра.

Задавая конкретным видом функции  $F[\sigma]$ , уравнение (314) приводим к интегро-дифференциальному уравнению относительно  $y(x, t)$ . Обычно к моменту приложения внешней нагрузки можно считать, что  $E(t) = \text{const}$ . Если принять

$$F[\sigma(x, t)] = \sum_1^n \beta_n \sigma^n(x, t), \quad (315)$$

то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{P}{EJ} y(x, t) - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \sum \frac{\beta_n}{h} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{y(x, \tau)}{h} \right]^n - \left[ \frac{1}{2} - \frac{y(x, \tau)}{h} \right]^n \right\} d\tau = \\ = \partial^2 y_0(x) / \partial x^2; \quad J = Fh^2/2. \end{aligned} \quad (316)$$

Если не учитывать изменения формы изогнутой оси при длительном действии сжимающей силы, то для стержня шарнирно-опертого по концам, можно принять  $y_0(x) = f_0 \sin \alpha_n x$ ;  $y(x, t) = f(t) \sin \alpha_n x$ .

Применяя метод Бубнова — Галеркина, выделим из (316) нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} f(t) + \int_{\tau_1}^t \Phi[f(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = f(\tau_1); \quad \Phi[f(\tau)] = \\ = \int_0^l \sum \frac{2\beta_n \sin \alpha_n x}{\alpha_n^2 \omega h} [0,5 + f(\tau) \sin \alpha_n x/h]^n - \\ - [0,5 - f(\tau) \sin \alpha_n x/h]^n dx, \end{aligned} \quad (317)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n = \frac{n\pi}{l}; \quad \omega = (P_0 - P) P_0; \quad P_0 = \pi^2 EJ/l^2; \\ f(\tau_1) = f_0/\omega. \end{aligned} \quad (318)$$

Уравнение (317) применимо при нечетных  $n$ , а при четных  $n$  — в пределах  $y(x, t) \leq h/2$ , так как в случае  $h/2 < y$  увеличение напряжений вызывает уменьшение кривизны, что неестественно.

Считаем, что стержень выполнен из нестареющего материала с мерой ползучести

$$C(t, \tau) = C_0 \{1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]\}. \quad (319)$$

В этом случае интегральное уравнение (317) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению (см. п. 5 гл. III)

$$\dot{f}(t) = \gamma \{C_0 \Phi[f(t)] - f(t) + f(\tau_1)\}. \quad (320)$$

Для монотонной функции  $f(t)$  это уравнение интегрируется в неявном виде

$$t = \tau_1 + \frac{1}{\gamma} \int_{f(\tau_1)}^{f(t)} \{C_0 \Phi[f(t)] - f(t) + f(\tau_1)\}^{-1} df(t). \quad (321)$$

При решении задач подобного типа обычно разыскивается критическое время  $t_{кр}$ , по истечении которого прогиб неограниченно возрастает, т. е.  $f(t) \rightarrow \infty$ . Поэтому  $t_{кр}$  определяется несобственным интегралом, который при  $n > 1$  может быть сходящимся или расходящимся в зависимости от знаков и соотношения коэффициентов полинома, стоящего под интегралом. Иными словами, в зависимости от соотношений геометрических размеров стержня, параметров деформирования и значения нагрузки критическое время может либо существовать, либо не существовать. В первом случае происходит потеря устойчивости, во втором — затухающее деформирование.



Таблица 20. Корни полинома  $f^3(t) + 3pf(t) + 2q$

| Случай | Нагрузка      | $p$     | $D=q^2+p^3$ | Характер движения                               |
|--------|---------------|---------|-------------|---|
| 1      | $P < \bar{P}$ | $p < 0$ | $D < 0$     | Затухание                                       |
| 2      |               |         | $D = 0$     |   |
| 3      |               |         | $D > 0$     | Потеря устойчивости<br>или<br>$t_{кр} < \infty$ |
| 4      | $P = \bar{P}$ | $p = 0$ |             |   |
| 5      | $P < \bar{P}$ | $p > 0$ |             |   |

Примечание.  $\bar{P} = P_0 / (1 + 3 \varphi_H)$ ;  $D = q^2 + p^3$ .

Пусть в полиноме (315) отлично от нуля только  $\beta_3 = \beta$  [66]. Положив в (321)  $\tau_1 = 0$ , как это обычно делается в теории упругой наследственности, получим

$$t = \frac{1}{a_1} \int_{f_0}^{f(t)} [f^3(t) + 3pf(t) + 2q]^{-1} df(t), \quad (322)$$

где

$$\begin{aligned} p &= -a_2/3a_1; \quad q = \gamma f(0)/2a_1; \quad a_1 = 3\gamma\varphi_H \zeta/h^2(1-\zeta); \\ a_2 &= \gamma(1-h^2 a_1); \quad \zeta = P/P_0; \quad \varphi_H = \beta EC_0 \sigma_{cp}^2; \\ \sigma_{cp} &= P/2F. \end{aligned} \quad (323)$$

Поведение  $f(t)$  зависит от корней полинома, стоящего в квадратных скобках (322). Данные для различных случаев представлены в табл. 20.

В случаях 1 и 2 все корни полинома ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) вещественны, и зависимость (322) после выполнения интегрирования удобно записать в форме

$$t = \frac{1}{a_1} \ln \frac{[f(t) - \lambda_1]^A [f(t) - \lambda_2]^B [f(t) - \lambda_3]^C}{[f(0) - \lambda_1]^A [f(0) - \lambda_2]^B [f(0) + \lambda_3]^C}, \quad (324)$$

где

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3); \quad B^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3); \\ C^{-1} &= (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2); \\ \lambda_1 &= -2r \cos(\nu/3); \quad \lambda_2 = 2r \cos(60^\circ - \nu/3); \\ \lambda_3 &= 2r \cos(60^\circ + \nu/3); \quad \cos \nu = q/r^3; \quad r = \sqrt{|p|}, \end{aligned} \quad (325)$$

знак при  $r$  должен совпадать со знаком при  $q$ .

В случае 3 один корень полинома вещественный, два других комплексно-сопряженные. Зависимость (322) после интегрирования записывается с помощью гиперболо-тригонометрических функций

$$t = a_1^{-1} (m_2 + 2m_1^2)^{-1} \left\{ \ln (f + m_1) (f_0 + m_1)^{-1} \sqrt{(f_0^2 - m_1 f_0 + m_2) (f^2 - m_1 f + m_2)^{-1}} + 3m_1 k [\arctg k (2f - m_1) - \arctg k (2f_0 - m_1)] \right\}, \quad (326)$$

где

$$f = f(t), f_0 = f(0); m_1 = 2r \operatorname{ch} v/3; m_2 = r^2 (\operatorname{crh}/3 + 3 \operatorname{sh}^2 v/3);$$

$$k = 0,5 \left( m_2 - \frac{m_1^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (327)$$

Случаи 4 и 5 соответствуют более высокой по сравнению со случаем 3 сжимающей силе и поэтому для расчета строительных конструкций интереса не представляют.

Соотношения  $p$  и  $q$  для случая 2 соответствуют максимальному значению сжимающей силы  $P_d$ , при которой процесс деформирования носит затухающий характер. Это значение равно наименьшему корню уравнения

$$P_d^9 + a_7 P_d^7 - a_6 P_d^6 + a_5 P_d^5 - a_4 P_d^4 + a_3 P_d^3 - a_2 P_d^2 + a_1 P_d - a_0 = 0, \quad (328)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{k_1}; a_6 = \frac{1}{k_1 k_2}; a_5 = \frac{1}{3k_1^2}; \\ a_4 &= \frac{2}{3k_1^2 k_2}; a_3 = \frac{1}{3k_1^2 k_2^2} + \frac{1}{27k_1^3} + \frac{81\xi_0^2}{108k_1^3 k_2^2}; \\ a_2 &= \frac{1}{9k_1^2 k_2}; a_1 = \frac{1}{9k_1^3 k_2^2}; a_0 = \frac{1}{27k_1^3 k_2^3}; \\ k_1 &= \beta EC_0/4F^2; k_2 = 1/P_3; \xi_0 = f_0/h. \end{aligned} \right\} \quad (329)$$

На рис. 44 показаны прогибы бетонной колонны во времени ( $\lambda = 40$ ;  $f_0 = 0,01$  см;  $E = 3,15 \cdot 10^4$  МПа;  $EC_0 = 2$ ;  $\gamma = 0,04$  1/сут;  $\beta = 12,5 \cdot 10^{-5}$ ;  $P_3 = 6140$  кН) от нагрузки  $P_d = 817,8$  кН и нагрузки  $P_1 = 1,0268 P_d = 820$  кН.

Кривые на рис. 44 иллюстрируют потерю устойчивости в случаях длительного нагружения как процесс, при котором малому изменению нагрузки  $P$  соответствует большее изменение функции  $f(t)$ . По сравнению со случаем  $n = 1$ , т. е. с решением, основанным на линейной теории (см. п. 4 гл. IV), полученные результаты, во-первых, от-

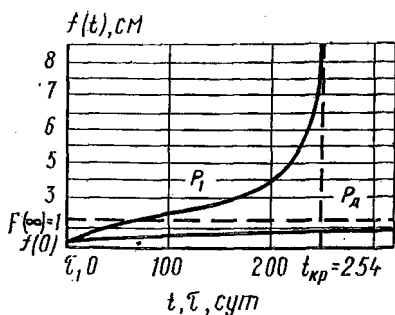


Рис. 44. Кривые развития прогибов сжатого стержня, построенные с помощью решения основанного на нелинейной теории упругой наследственности

личаются характером кривых  $f(t)$ , на которые влияет не только значение сжимающей силы  $P$ , но и начальная погрязь  $f_0$  и, во-вторых, тем, что критическое время может быть конечным.

Полезно обратить внимание и на то, что для стержня из нестареющего материала специфика решения, основанного на нелинейной теории ползучести (328), приводит к необходимости определять критическую силу  $P_d$  как наибольшую, при которой процесс деформирования носит затухающий характер.

Для стержня, материал которого соответствует предположкам теории старения  $C(t, \tau) = A(t) - A(\tau)$ , сделав соответствующие преобразования, получим дифференциальное уравнение  $df(t) = \Phi[f(t)] dA(t)$  или, проинтегрировав,

$$A(t) = \int_{f(0)}^{f(t)} \Phi[f(t)]^{-1} df(t), \quad (330)$$

где  $f(0)$  — упругомгновенный прогиб в момент  $\tau_1 = 0$ . Из этого уравнения можно определить меру ползучести  $A_{кр}(t)$ , при которой прогибы неограниченно возрастают. Она определяется, как и  $t_{кр}$ , несобственным интегралом.

Зная  $A_{кр}(t)$ , можно определить критическое время, например из уравнения  $A_{кр}(t) = A[1 - \exp(-\gamma t_{кр})]$ .

При  $n = 1$  (линейная ползучесть) несобственный интеграл (330) расходится, т. е. критическое время отсутствует.

Как и ранее, принимаем  $E(t) = \text{const}$  и кубическую нелинейность [в (315) только  $\beta_3 = \beta \neq 0$ ], тогда (330) запишется так:

$$A(t) = [(P_0 - P) / 12\beta\sigma_{cp}^3 EF] \ln \{ \xi^2(t) [1 + \xi^2(0)] / \xi^2(0) [1 + \xi^2(t)] \}, \quad (331)$$

где  $\xi(t) = f(t)/h$  — безразмерный прогиб. Определяем  $A_{кр}(t)$  из условия

$$A_{кр}(t) = [(P_0 - P) / 12\beta\sigma_{ср}^3 E F] \ln [(1 + \xi^2(0)) / \xi^2(t)], \quad (332)$$

следующего из (331) при  $\xi(t) \rightarrow \infty$ .

Очевидно, что при расчете стержней, применяемых в качестве элементов строительных конструкций, необходимо исходить из неравенства  $A_{кр}(t) \geq A(\infty)$ , где  $A(\infty)$  — предельное значение меры ползучести. Следовательно, можно оценить критическую силу. Учитывая, что  $\xi^2(0) \ll \ll 1$ , получим уравнение для  $P_{д}$

$$3\beta EA(\infty) P_{д}^3 = 4F(P_{д} - P_0) \ln \xi_0 P_0 / (P_0 - P_{д}). \quad (333)$$

Рис. 45 иллюстрирует развитие перемещений стержня, аналогичного рассмотренному выше [ $A(\infty) E = 2$ ;  $P = P_{д} = 1466$  кН;  $P_1 = 1480$  кН;  $P_2 = 1400$  кН;  $P_3 = 1440$  кН]. Кривые показывают, что старение увеличивает критическую силу и при относительно высоких нагрузках значительно снижает скорость деформирования. Однако при нагрузках, несколько меньших критических, прогибы могут быть сколь угодно большими. Поэтому несущая способность стержня, выполненного из материала, деформирование которого соответствует теории старения, определяется его прочностью.

Правые части формулы (331) и формулы, построенной Н. Хоффом [123] с помощью теории течения, аналогичны

$$t = [(\sigma_0 - \sigma) / 6Ek\sigma^3] \ln [\xi^2(1 + \xi_0^2) / \xi_0^2(1 + \xi^2)]. \quad (334)$$

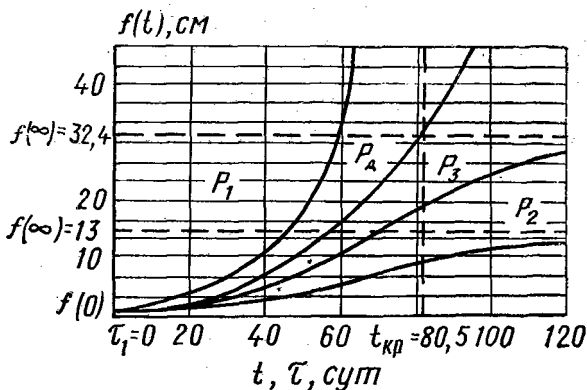


Рис. 45. Кривые развития прогибов сжатого стержня, построенные с помощью решения, основанного на нелинейной теории старения

Однако в левой части (331) стоит величина, изменяющаяся в конечных пределах  $[0 \leq A(t) \leq A(\infty)]$ . Первый случай относится к неустановившейся ползучести, когда в зависимости от уровня сжимающей силы возможно затухающее или незатухающее деформирование, приводящее к потере устойчивости. Во втором случае уровень сжимающей силы сказывается только на критическом времени, т. е. потеря устойчивости может происходить при любом значении сжимающей силы.

## 5. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Влияние длительного действия нагрузки на прочность можно наиболее наглядно представить, если базироваться на линейной механике разрушения. Механика разрушения исследует условия, при которых происходит развитие трещин. Считается, что при увеличении длины трещины до критической  $l_{кр}$  происходит разрушение. Внешняя нагрузка, приводящая к развитию длины трещины до  $l_{кр}$ , является предельной нагрузкой, а соответствующее напряжение характеризует прочность материала. Критическая длина трещины в первом приближении может считаться независимой от деформативных свойств твердого тела.

Будем полагать, что тонкий диск, выполненный из однородного, изотропного упругого материала, находится в условиях одноосного растяжения. В диске имеется трещина, ориентированная перпендикулярно направлению растяжения; длина трещины мала по сравнению с шириной и высотой диска. В соответствии с принципом Гриффитса сформулированным применительно к хрупким телам, трещина начнет лавинообразно расширяться, если скорость освобождения энергии упругой деформации превзойдет прирост поверхностной энергии трещины. Этот принцип приводит к такой зависимости между предельной интенсивностью растягивающей нагрузки  $q_{пр}$  и критической длиной трещины  $l_{кр}$ :

$$q_{пр} = (2E\gamma)^{0,5} G(l_{кр}),$$

где  $\gamma$  — поверхностная энергия (на единицу площади),  $G$  — некоторая функция от длины трещины.

Дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования привели к концепции квазихрупкого разрушения, согласно которой записанная формула справедлива для м

териалов и в условиях квазихрупкого разрушения, если  $\gamma$  понимать как необратимую энергию диссипации в тонком слое пластических деформаций вблизи поверхности трещины.

Если рассматривать стареющее упругое тело, т. е. считать, что  $E$  и  $\gamma$  зависят от возраста материала в момент приложения нагрузки  $t$ , получим

$$q_{\text{пр}}(t) = [2E(t) \gamma(t)]^{0.5} G(l_{\text{кр}}). \quad (335)$$

То обстоятельство, что линейная ползучесть не приводит к изменению обобщенного плоского напряженного состояния, вызванного внешней нагрузкой [см. (170) и далее], открывает возможность для построения соответствующего решения на основе формулы (335). Поскольку решение задачи базируется на зависимости нагрузка — длина трещины, связанной с деформативностью материала, то прежде всего необходимо выбрать характеристику деформативности, учитывающую наличие деформаций ползучести. В первом приближении можно полагать, что  $\gamma(t)$  не связана с продолжительностью действия нагрузки.

В упругой стадии, соответствующей (335), и при наличии линейной ползучести справедливы такие физические зависимости [см. (74)]:

$$\sigma(t) \varepsilon(t)^{-1} = E(t); \quad \sigma(t) \varepsilon^*(t)^{-1} = E(t) [K\zeta(t)]^{-1}. \quad (336)$$

где

$$K\zeta(t) = 1 - E(t) \int_{\tau_1}^t \zeta(t, \tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad \zeta(t) = \frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}. \quad (337)$$

Это показывает, что линейная ползучесть и переменность во времени нагрузки могут быть учтены путем введения в выражение, стоящее в фигурных скобках, дополнительного множителя  $[K\zeta(t)]^{-1}$ . Прделав это, придем к формуле для определения предельной интенсивности длительно действующей нагрузки в условиях ползучести

$$q_{\text{пр}}^*(t) = \{2E(t) \gamma(t) [K\zeta(t)]^{-1}\}^{0.5} G(l_{\text{кр}}).$$

С помощью (335) полученное выражение приводится к виду

$$q_{\text{пр}}^*(t) = q_{\text{пр}}(t) H_q(t, \tau_1); \quad H_q(t, \tau_1) = [K\zeta(t)]^{-0.5}, \quad (338)$$

где  $H_q(t, \tau_1)$  — коэффициент приведения прочности при мгновенном (кратковременном) действии  $q_{\text{пр}}(t)$  к прочности при длительно действии нагрузки  $q_{\text{пр}}^*(t)$ .

При нагрузке, постоянной во времени,  $\sigma(t) = \sigma(\tau) = \text{const}$ ,  $\zeta(t) = 1$ ; из формул (338) с учетом (22) следует

$$q_{\text{пр}}^*(t) = q_{\text{пр}}(t) \left[ \frac{E(\tau)}{E(t)} \frac{1}{1 + E(\tau_1) C(t, \tau_1)} \right]^{0,5} \quad (3)$$

С выражением (339) с точностью до множителя  $m(t)$ , стоящего при  $q_{\text{пр}}(t)$ , совпадает формула, полученная Ю. В. Зайцевым [42] и связывающая пределы прочности бетона при сжатии в условиях кратковременного  $R(t)$  длительного действия постоянных нагрузок  $R_{\text{дл}}(t)$ ; считается, что  $m(t, \tau_1)$  учитывает влияние длительного объема на кратковременную прочность (см. также [20]). Такое соответствие между формулами, несмотря на то, что в хрупких телах трещины располагаются преимущественно в направлении действия сжимающих напряжений, объясняется как слабой зависимостью распределения растягивающих напряжений у устья трещины от характера нагрузки так и с линейностью ползучести бетона при растяжении.

\* \* \*

Нелинейная наследственная теория старения, постулирующая отсутствие влияния уровня напряжений на характер нелинейной составляющей ползучести [см. рис. 1 и условия (9) и (10)], и теория длительного разрушения в основном развиваются как два самостоятельных направления механики сплошной среды. Имеются отдельные предположения (например, [108, 130]), направленные на объединение этих направлений.

## ГЛАВА VI

### ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ, РАБОТАЮЩИЕ БЕЗ ТРЕЩИН

Если в однородных и изотропных телах и в системах составленных из однородных элементов, линейная ползучесть влияет только на напряженные состояния, вызванные вынужденными деформациями [см. (170), (185), (196) (197)], то в неоднородных и анизотропных телах, а также в системах, составленных из неоднородных элементов, такое влияние наблюдается и при действии внешних нагрузок. В анизотропных телах это связано с различными

зависимостями между составляющими тензора напряжений и тензора деформаций; в неоднородных телах — с зависимостью деформативных свойств от места положения точки; в системах, составленных из неоднородных элементов, — с различием деформативных свойств отдельных элементов.

При проектировании строительных конструкций часто приходится рассматривать системы, составленные из неоднородных элементов. Речь прежде всего идет о железобетонных и деревометаллических конструкциях, т. е. кон-

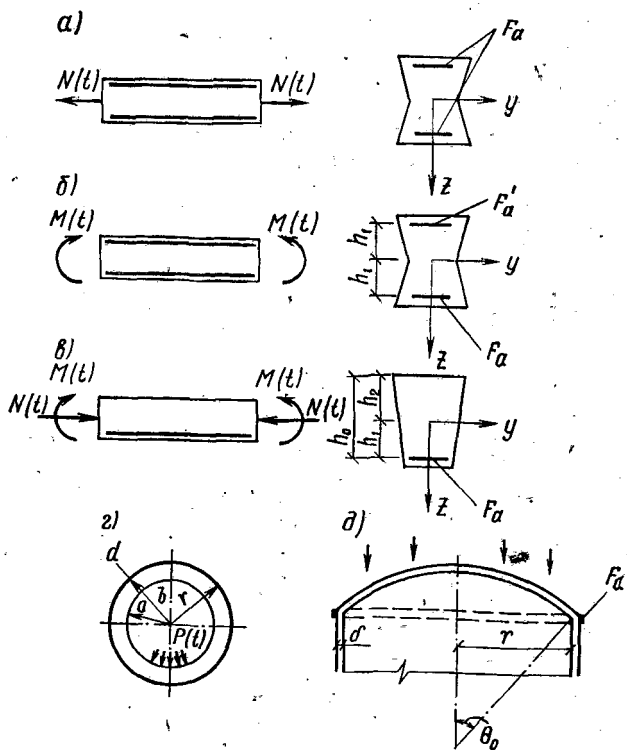


Рис. 46. Железобетонные элементы с одиночной арматурой

*a, б* — стержень с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии; *a* —  $\rho_1=1$ ,  $\mu=F_a/F_0$ ; *б* —  $\rho_1(2F_0h^2)/I_0$ ;  $F_a^1=F_a$ ,  $\mu=F_a/F_0$ ; *в* — то же, имеющим одну ось симметрии;  $\rho_1=1+(F_0h^2)/I_0$ ,  $\mu=F_a/F_0$ ; *г* — толстостенная труба, усиленная предварительнонапряженной арматурой;  $F_a$  — площадь поперечного сечения арматуры на 1 м продольного сечения;  $\rho_1=1/\ln \beta$ ,  $\mu=F_a/c$ ,  $c=b+d/2$ ,  $\beta=b/a$ ; *д* — цилиндрический резервуар со сферическим покрытием:  $\mu=F_a/\delta^2$ ,  $\rho_1=1,305 : [(1+1/\sqrt{\sin \theta_0})(r/\delta)^{1/2}]$



струкциях, в которых материал одного элемента — бетон или дерево — обладает упругими свойствами и ползучестью, второго — сталь — деформируется только упруго. Основы общего подхода к определению внутренних усилий в системах, составленных из неоднородных элементов, обладающих ползучестью, были заложены А. Р. Ржаницыным [106]. В [85] изложен достаточно общий метод расчета влияния длительных процессов на усилия и перемещения в конструкциях, отдельные части которых обладают различными деформативными свойствами. Сущность метода связана с классификацией систем, составленных из неоднородных элементов, и основана на построении для каждого класса единых интегро-дифференциальных уравнений — уравнений совместности деформаций.

Применительно к железобетонным конструкциям такие уравнения записываются как условия совместности деформации арматуры и прилегающего к ней бетона. Поэтому число уравнений оказывается равным числу групп арматурных стержней (пучков, прядей) с напряжениями, равными по абсолютному значению. На рис. 46 изображены элементы железобетонных конструкций, напряженное состояние которых может быть описано на основе составления и решения одного уравнения совместности деформаций; такие элементы в дальнейшем условно называются элементами с одиночной арматурой. Рассмотрение железобетонного стержня с двойной несимметричной арматурой требует составления двух уравнений совместности деформаций, следовательно, и решения системы, состоящей из двух уравнений (элементы с двойной арматурой).

## 1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОДИНОЧНОЙ АРМАТУРОЙ

Уравнение совместности деформаций арматуры  $\varepsilon_a^*$  прилегающего к ней бетона  $\varepsilon_b^*$  имеет вид

$$\varepsilon_a^*(t) - \varepsilon_b^*(t) = 0. \quad (34)$$

Из условий равновесия можно показать, что разность между напряжениями в бетоне у места расположения арматуры, вычисленными для бетонного  $\sigma$  и железобетонного элемента  $\sigma_b^*$ , пропорциональна произведению  $\mu \rho_1 \sigma_a^*$ , т. е.

$$\sigma(t) - \sigma_b^*(t) = \mu \rho_1 \sigma_a^*(t), \quad (34)$$

где  $\mu = F_a/F_b$ ;  $\rho_1$  — коэффициент, характеризующий ге

метрию поперечного сечения элемента, расположение арматуры и напряженное состояние;  $\sigma_a^*$  — напряжение в арматуре.

Считая, что арматура деформируется только упруго, а деформации бетона описываются формулами линейной теории ползучести, можно использовать формулы:

$$\varepsilon_a^*(t) = \frac{\sigma_a^*(t)}{E_a} + \varepsilon_{a0}(t); \quad \varepsilon_b^*(t) = \frac{\sigma_b^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_b^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_{b0}(t), \quad (342)$$

где  $\varepsilon_{a0}$  и  $\varepsilon_{b0}(t)$  — вынужденные деформации арматуры и бетона.

Подставив эти значения деформаций в (340) и исключив  $\sigma_a^*$ , с помощью (341) после простейших преобразований приходим к уравнению [7, 85]

$$\sigma_b^*(t) - \lambda(t) E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_b^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma_b(t), \quad (343)$$

причем

$$\lambda(t) = \frac{\mu \rho_1 n(t)}{1 + \mu \rho_1 n(t)}; \quad \sigma_b(t) = \frac{\sigma(t) + \mu \rho_1 E_a [\varepsilon_{a0}(t) - \varepsilon_{b0}(t)]}{1 + \mu \rho_1 n(t)}; \\ n(t) = \frac{E_a}{E(t)}, \quad (344)$$

Нетрудно заметить, что  $\sigma_b(t)$  является решением уравнения (343) при  $\tau_1 = t$ , т. е. решением соответствующей упругомгновенной задачи.

Уравнение (343) идентично уравнению (97); различие только в том, что перед интегралом имеется дополнительный множитель  $\lambda(t)$ . Для стержней с обычной гибкой арматурой, т. е. для стержней, армирование которых характеризуется неравенством  $\mu \ll 1$ , соответственно  $1 \ll \lambda(t)$ . Это связано с тем, что уравнение (97) описывает напряженное состояние стержня, закрепленного жесткими связями, уравнение (343) — стержня, деформирование которого стеснено упругими связями. Наличие в правой части (343) напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon_{b0}$  и  $\varepsilon_{a0}$  свидетельствует об одинаковом влиянии ползучести бетона на напряжения, вызванные вынужденными деформациями в бетоне  $\sigma_{бд}^*$  и ар-

матуре<sup>1</sup>  $\sigma_{ад}^*$ , и напряжения, вызванные внешними силами в бетоне  $\sigma_{бс}$ . Поэтому формулы для вычисления этих напряжений можно представить так:

$$\sigma_{бд}^*(t) = \sigma_{бд}(t) H_a(t, \tau_1); \quad \sigma_{ад}^*(t) = \sigma_{ад}(t) H_a(t, \tau_1); \quad (345)$$

$$\sigma_{бс}^*(t) = \sigma_{бс}(t) H_a(t, \tau_1),$$

где  $\sigma_{бд}$ ,  $\sigma_{ад}$ ,  $\sigma_{бс}$  — решения (напряжения) соответствующих упругомгновенных задач, получаемые с помощью второй формулы (344) и зависимости (341);  $H_a(t, \tau_1)$  — коэффициент уменьшения напряжений, определяемый из решения уравнения (343).

Из уравнения (343) при  $t > \tau_1$  также следуют неравенства

$$\sigma_{бд}^* < \sigma_{бд}; \quad \sigma_{ад}^* < \sigma_{ад}; \quad \sigma_{бс}^* < \sigma_{бс}; \quad H_a(t, \tau_1) < 1, \quad (346)$$

свидетельствующие об уменьшении вследствие ползучести всех напряжений (345).

При действии внешних сил напряжение в арматуре  $\sigma_{ас}$  тоже удобно представить как произведение:

$$\sigma_{ас}^*(t) = \sigma_{ас}(t) H_{ас}(t, \tau_1). \quad (347)$$

При  $\epsilon_{а0} = \epsilon_{б0} = 0$  вторая формула (344) и зависимость (341) позволяют получить выражения для определения упругомгновенных напряжений

$$\sigma_{бс}(t) = \frac{\sigma(t)}{1 + \mu \rho_1 n(t)}; \quad \sigma_{ас}(t) = n(t) \sigma_{бс}(t). \quad (348)$$

Эти выражения совместно с (341), (345) и (347) приводят к зависимостям

$$H_{ас}(t, \tau_1) = 1 + \frac{A(t, \tau_1)}{\mu \rho_1 n(t)}; \quad A(t, \tau_1) = 1 - H_a(t, \tau_1), \quad (349)$$

свидетельствующим об увеличении напряжений  $\sigma_{ас}^*$  вследствие ползучести бетона.

В случаях, когда к моменту расчета напряженного состояния  $t$  модуль упругомгновенных деформаций бетона может быть принят постоянным  $E(t) = E(\infty) = E = \text{const}$ ,  $n(t) = n(\infty) = n = \text{const}$ , справедливо равенство

$$\lambda(t) = \lambda = \frac{\mu \rho_1 n}{1 + \mu \rho_1 n} = \text{const}. \quad (350)$$

Это указывает на возможность определения  $\sigma_b^*(t)$  с помощью уравнения (97) с предварительной заменой в нем  $E$  на  $\lambda E(t)$ . Если к моменту приложения внешней нагрузки

<sup>1</sup> В силу (341) при  $\sigma(t) = 0$ .

или введения вынужденных деформаций  $\tau_1$  можно считать, что  $E(\tau) = E(\tau_1) = \text{const}$ , то

$$\lambda E \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} = \lambda E \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}. \quad (351)$$

Тогда  $\sigma_0^*$  может быть определено путем решения уравнения (97) с предварительной заменой в нем  $E(\tau_1)$  на  $\lambda E(\tau_1)$ . В частности, это открывает возможность для вычисления коэффициентов уменьшения и затухания напряжений  $H_a(t, \tau_1) = H_a^*(t, \tau_1)$ , вызванных стационарными вынужденными деформациями или постоянными внешними силами, по формулам табл. 13 и 14. Необходимо только в соответствии с (351) предварительно заменить  $\varphi$  на  $\varphi_a$ ;  $a$  на  $a_a$  и  $c$  на  $c_a$ , причем

$$\varphi_a = \lambda \varphi, \quad a_a = \lambda a, \quad c_a = \lambda c. \quad (352)$$

При этом напряжения могут вычисляться как произведения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{бд}}^*(t) &= \sigma_{\text{бд}}(\tau_1) H_a^*(t, \tau_1); \quad \sigma_{\text{ад}}^*(t) = \sigma_{\text{ад}}(\tau_1) H_a^*(t, \tau_1); \\ \sigma_{\text{бс}}^*(t) &= \sigma_{\text{бс}}(\tau_1) H_a^*(t, \tau_1). \end{aligned} \quad (353)$$

Для определения предельных значений коэффициентов затухания  $H_a^*(\infty, \tau_1)$  удобно использовать табл. 15, понимая под  $\varphi$  —  $\varphi_a$ . Описанное решение уравнения (343) позволяет вычислить потери усилий предварительного напряжения, происходящие вследствие ползучести бетона  $\sigma_{\text{п}}(t)$  по формулам (см. также [7])

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{п}}(t) &= \sigma_{\text{ад}}(\tau_1) - \sigma_{\text{ад}}(\tau_1) H_a^*(t, \tau_1) = \sigma_{\text{ад}}^*(\tau_1) A^*(t, \tau_1); \\ A^*(t, \tau_1) &= 1 - H_a^*(t, \tau_1). \end{aligned} \quad (354)$$

При расчете потерь необходимо иметь в виду следующее. Условие (340) записано для любого  $t$ , включая  $t = \tau_1$ , т.е. применительно к случаю натяжения арматуры на упоры; в первой формуле (342) принято, что  $\varepsilon_{\text{оа}}(t)$  положительно, т.е. соответствует увеличению длины. При спуске натяжных приспособлений происходит укорочение арматуры, равное  $\Delta_{\text{н}}$ , т.е. происходит деформация, имеющая отрицательный знак. Поэтому согласно второй формуле (344) и зависимости (341),  $\sigma_{\text{ад}}(t)$  и  $\sigma_{\text{ад}}(\tau_1)$ , входящие в (345) и (354), определяются так:

$$\sigma_{\text{ад}}(t) = \frac{\sigma_0}{1 + \mu \rho_1 n(t)}; \quad \sigma_{\text{ад}}(\tau_1) = \frac{\sigma_0}{1 + \mu \rho_1 n}; \quad \sigma_0 = \Delta_{\text{н}} E_a. \quad (355)$$

где  $\sigma_0$  — напряжение в арматуре до обжатия бетона, т. е. контролируемое напряжение. При натяжении на бетон  $\sigma_{ад}(\tau_1)$  замеряется и является контролируемым напряжением.

Поскольку при обычных коэффициентах армирования  $\varphi_a \ll \varphi$ , то различие в значениях  $H_a^*(\infty)$ , вычисленных по теории старения и равных  $e^{-\varphi_a}$  и по теории упругой наследственности, равных  $1/(1 + \varphi_a)$  (см. табл. 13), меньше, чем различие в значениях соответствующих коэффициентов затухания для бетонного элемента  $H^*(\infty)$  [(119), (121)]. Но в силу неравенства  $\varphi_a \ll 1$  может оказаться, что относительное различие в значениях  $A^*(t, \tau_1)$ , т. е.  $(1 - e^{-\varphi_a}) \varphi_a / (1 + \varphi_a)$ , больше, чем в значениях  $H_a(\infty)$ .

При рассмотрении железобетонных элементов на стадии интенсивного твердения бетона [ $E(\tau) \neq \text{const}$ ], а также при переменных во времени внешних воздействиях решение уравнения (343) рационально выполнять в численной форме.

Для случая действия только внешней нагрузки зависимости (344) позволяют привести уравнение (343) к виду

$$\frac{1}{\mu \rho_1 n(t)} \sigma_{bc}^*(t) + \sigma_{bc}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_{bc}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{\mu \rho_1 n(t)} \sigma(t) \quad (356)$$

Нетрудно заметить, что сумма операций, выполняемых во втором и третьем слагаемых левой части уравнения (356) является интегральным оператором (139). Это обстоятельство и равенство (140) открывают возможности для получения матричного уравнения

$$(n + \Delta \delta) \vec{\sigma}_{bc}^* = n \vec{\sigma}, \quad \vec{\sigma}_{bc}^* = (n + \Delta \delta)^{-1} n \vec{\sigma}, \quad (357)$$

где

$$\vec{\sigma}_{bc}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{bc}^*(\tau_1) \\ \sigma_{bc}^*(t_1) \\ \dots \\ \sigma_{bc}^*(t_n) \end{bmatrix}; \quad n = \frac{1}{\mu \rho_1} \begin{vmatrix} 1 \\ n(t) \\ \dots \\ 1 \\ n(t_n) \end{vmatrix}; \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(\tau_1) \\ \sigma(t_1) \\ \dots \\ \sigma(t_n) \end{bmatrix}, \quad (358)$$

матрица  $\Delta\delta$  строится согласно (141), матрица  $(n + \Delta\delta)^{-1}$  является обратной матрице  $n + \Delta\delta$ .

Несмотря на то что после определения вектора  $\vec{\sigma}_{bc}^*$  с помощью формул (345), (349) и (347) можно вычислять векторы напряжений  $\vec{\sigma}_{ac}^*$ ,  $\vec{\sigma}_{bc}^*$  и  $\vec{\sigma}_{ad}^*$ , решения некоторых задач (см. п. 2 и 5 этой главы) требуют записи зависимостей для напряжений  $\vec{\sigma}_{ac}^*$  в общем виде. Для получения таких зависимостей уравнение (343) с учетом (341) переписывается так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu\rho_1 n(t)} \sigma_{ac}^*(t) + \sigma_{ac}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_{ac}^*(\tau) \frac{\partial\delta(t, \tau)}{\partial\tau} d\tau = \\ = \frac{1}{\mu\rho_1} \left[ \sigma(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial\delta(t, \tau)}{\partial\tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (359)$$

Это уравнение совместно с формулами (139) и (140) приводит к матричному уравнению

$$(n + \Delta\delta) \vec{\sigma}_{ac}^* = \frac{1}{\mu\rho_1} \Delta\delta\vec{\sigma}; \quad \vec{\sigma}_{ad}^* = \frac{1}{\mu\rho_1} (n + \Delta\delta)^{-1} \Delta\delta\vec{\sigma}, \quad (360)$$

предназначенному для вычисления вектора  $\vec{\sigma}_{ac}^*$ , элементами которого являются  $\sigma_{ac}(\tau_1)$ ,  $\sigma_{ac}^*(t_1)$ , ...,  $\sigma_{ac}^*(t_n)$ ; матрицы, входящие в (360), строятся в соответствии с (358) и (141).

В заключение подчеркнем, что приведенное решение описывает изменение во времени напряжений в арматуре  $\sigma_{ad}^*(t)$ ,  $\sigma_{ac}^*(t)$  и в бетоне у арматуры  $\sigma_{bd}^*(t)$ ,  $\sigma_{bc}^*(t)$  целого класса железобетонных элементов, характеризующихся условием (340). Информация об особенностях каждого конкретного элемента содержится в множителе  $\lambda(t)$ , вернее в произведении  $\mu\rho_1$ , входящем в решение упругомгновенной задачи (344). Формулы для определения  $\mu$  и  $\rho_1$  для некоторых элементов приведены на рис. 46.

## 2. ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ СТЕРЖНИ

Железобетонный стержень с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии (см. рис. 46, а, б). При наличии внешних сил  $N(t)$  уравнение равновесия части стержня и формулы для вычисления напряжений в бетоне  $\sigma_{bc}^*$  и арматуре  $\sigma_{ac}^*$  имеет вид

$$\begin{aligned} N_{\delta}^*(t) + N_a^*(t) = N(t); \quad \sigma_{bc}^*(t) = N_{\delta}^*(t) / F_{\delta}; \\ \sigma_{ac}^*(t) = N_a^*(t) / F_a; \quad \sigma_b(t) = N(t) / F_{\delta}, \end{aligned} \quad (361)$$

где  $N_0^*$ ,  $N_a^*$ ,  $F_0$  и  $F_a$  — усилия, передающиеся на арматуру и на бетон и соответствующие площади поперечных сечений

С помощью последних трех формул можно записанное уравнение равновесия привести к виду

$$\sigma(t) - \sigma_{0c}^*(t) = \mu \sigma_{ac}^*(t). \quad (362)$$

Сопоставление этого равенства с (341) показывает, что в данном случае  $\rho_1 = 1$ .

При действии внешних моментов  $M(t)$  уравнение равновесия и формулы для определения напряжений в арматуре и в бетоне у арматуры записываются так:

$$M_a^*(t) + M_0^*(t) = M(t); \quad \sigma_{ac}^*(t) = \frac{M_a^*(t)}{2h_1 F_a}; \quad (363)$$

$$\sigma_{0c}^*(t) = \frac{M_0^*(t) h_1}{J_0}; \quad \sigma(t) = \frac{M(t) h_1}{J_0},$$

где  $F_a$  — площадь арматуры, расположенной у одной стороны сечения, т. е. половина полной площади арматуры;  $J_0$  — момент инерции бетонной части сечения относительно оси  $Oy$  (см. рис. 46, б).

С помощью последних трех формул уравнение равновесия приводится к виду

$$\sigma(t) - \sigma_{0c}^*(t) = \mu \frac{2h_1^2 F_0}{J_0} \sigma_{ac}^*(t); \quad \mu = \frac{F_a}{F_0}. \quad (364)$$

Сравнение (364) с (341) свидетельствует о необходимости принятия  $\rho_1 = 2h_1^2 F_0 / J_0$ .

Напряжения в арматуре и напряжения в бетоне, вызванные силами  $N(t)$  и постоянные по поперечному сечению стержня, вычисляются в соответствии с рекомендациями приведенными в п. I. Формулу для напряжений в бетоне при изгибе

$$\sigma_{0c}^*(z, t) = \frac{M_0^*(t) z}{J_0} \quad (365)$$

с помощью (363), (348), (347) и (349) можно привести к виду

$$\sigma_{0c}^*(z, t) = \frac{\sigma_{ac}^*(t) H_a(t, \tau_1) z}{1 + \mu \rho_1 n(t) h_1}. \quad (366)$$

Если стержень предварительно обжат, то дополнительные сжимающие напряжения в бетоне подсчитываются по первой формуле (345), полагая  $\rho_1 = 1$ ,  $\sigma_{0c}^*(t) = -\mu \sigma_{ad}^*(t)$ .

Продольные деформации и кривизна стержня с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии, вызванные внешними силами  $N(t)$  и  $M(t)$ , определяются упругими деформациями арматуры

$$\varepsilon_{ac}^*(t) = \frac{\sigma_{ac}^*(t)}{E_a}; \quad \kappa^*(t) = \frac{\sigma_{ac}^*(t)}{E_a h_1}. \quad (367)$$

С помощью зависимостей (347), (348) и (363) вторую из этих формул можно представить так:

$$\kappa^*(t) = \frac{M(t)}{B^*(t)}; \quad B^*(t) = B(t)/H_{ac}(t, \tau_1);$$

$$B(t) = E(t) J_6 [1 + \mu \rho_1 n(t)], \quad (368)$$

где  $B^*(t)$  — условная жесткость стержня при длительном действии нагрузки.

Если расчет проводится в численном виде, то для определения вектора условной жесткости удобно использовать формулу

$$\vec{B}^{*-1} = \frac{1}{E_a J_6 \mu \rho_1} \vec{B}_\zeta^{-1} \quad |\zeta'| = \left| \frac{M(\tau_1)}{M(t_n)}, \frac{M(t_1)}{M(t_n)}, \dots, 1 \right|, \quad (369)$$

причем  $\mathbf{B}$  — нижняя треугольная матрица порядка  $n \times n$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$b_{ik} = \sum_{j=k}^{j=1} m_{ij} \Delta_{jk}. \quad i=0, 1, 2, \dots, n, \quad k=0, 1, 2, \dots, n,$$

а  $\Delta_{jk}$  и  $m_{ij}$  — элементы матриц  $\Delta\delta$  и  $(n + \Delta\delta)^{-1}$  [см. (141) и (358)].

Стержень с поперечным сечением, имеющим одну ось симметрии и одиночное армирование (см. рис. 46, в). При действии на стержень нормальной силы  $N(t)$ , приложенной в центре тяжести бетонного сечения, и изгибающего момента  $M(t)$  уравнения равновесия и формулы для определения напряжений в арматуре и в бетоне у арматуры имеют вид

$$N_a^*(t) + N_6^*(t) = N(t); \quad M_a^*(t) + M_6^*(t) = M(t);$$

$$N_a^*(t) = F_a \sigma_{ac}^*(t); \quad M_a^*(t) = h_1 F_a \sigma_{ac}^*(t); \quad (370)$$

$$\sigma_{6c}^*(t) = \frac{N_6^*(t)}{F_6} + \frac{M_6^*(t)}{J_6} h_1; \quad \sigma(t) = \frac{N(t)}{F_6} + \frac{M(t)}{J_6} h_1.$$



Эти уравнения и зависимости позволяют получить зависимость, аналогичную (341)

$$\sigma_{\sigma}^*(t) - \sigma_{\sigma}^*(t) = \mu \left( 1 + \frac{F_{\sigma} h_1^2}{J_{\sigma}} \right) \sigma_{\sigma}^*(t) \quad (371)$$

и свидетельствующую о необходимости принятия  $\rho_1 = 1 + \frac{F_{\sigma} h_1^2}{J_{\sigma}}$ .

На основании выражения

$$\sigma_{\sigma}^*(z, t) = \frac{N_{\sigma}^*(t)}{F_{\sigma}} + \frac{M_{\sigma}^*(t)}{J_{\sigma}} z, \quad (372)$$

а также (370) записывается формула для вычисления напряжений в бетоне, вызванных нагрузкой,

$$\sigma_{\sigma}^*(z, t) = \sigma(z, t) - \mu \left[ (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} + 1 \right] \sigma_{\sigma}^*(t), \quad (373)$$

причем

$$\sigma(z, t) = \frac{N(t)}{F_{\sigma}} + \frac{M(t)}{J_{\sigma}} z. \quad (374)$$

С помощью (373) и (374) нетрудно получить выражение для определения расстояния между центром тяжести бетонного сечения и точкой, соответствующей  $\sigma_{\sigma}^*(z, t) = 0$ , а затем и зависимость для подсчета высоты сжатой зоны

$$x_{\sigma}^*(t) = h_0 - h_1 \left\{ 1 - \frac{[F_{\sigma} \sigma_{\sigma}^*(t) - N(t)] h_1}{M(t) - h_1 F_{\sigma} \sigma_{\sigma}^*(t)} \right\}. \quad (375)$$

Поскольку формула (373) получена из зависимостей (372) и (370), справедливых при наличии вынужденных деформаций и действии нагрузок, то, положив в ней  $\sigma(z, t) = 0$  и заменив индексы в обозначениях напряжений, найдем

$$\sigma_{\sigma}^*(z, t) = -\mu \left[ (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} + 1 \right] \sigma_{\sigma}^*(t). \quad (376)$$

Входящие в выражения (373), (375) и (376) величины  $\sigma_{\sigma}^*(t)$  и  $\sigma_{\sigma}^*(t)$  подсчитываются с помощью (345), (347), (349). Для построения соответствующих векторов можно использовать (360) и (357); в последнем случае вместо  $\sigma(t)$  необходимо принимать  $\mu \rho_1 E_{\sigma} [\varepsilon_{\sigma 0}(t) - \varepsilon_{\sigma 0}(t)]$ .

На рис. 47 показаны эпюры нормальных напряжений поперечном сечении железобетонного стержня, возникающие при действии моментов и предварительного напряжения.

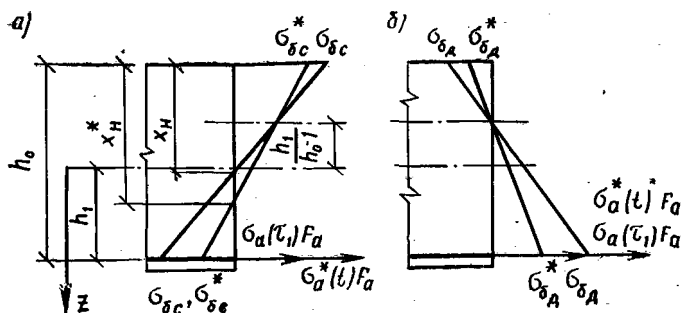


Рис. 47. Эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении железобетонного стержня

а — при чистом изгибе; б — при предварительном напряжении арматуры

При несимметричном расположении арматуры по высоте сечения стержня (см. рис. 46, в) кривизну приходится разыскивать из общего соотношения

$$\kappa^*(t) = [\varepsilon_{\delta}^*(h_1, t) - \varepsilon_{\delta}^*(-h_2, t)] / h_0. \quad (377)$$

При напряженном состоянии, вызванном нагрузкой, подставив во вторую формулу (342) значение  $\sigma_{\delta c}^*(z, t)$ , найдем при  $\varepsilon_{\delta 0} = 0$

$$\varepsilon^*(t, z) = \frac{1}{E(t)} \left\{ \sigma(t, z) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau, z) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \right. \\ \left. - \mu \left[ 1 + (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} \right] \left[ \sigma_{ac}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_{ac}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \right\}. \quad (378)$$

С помощью уравнения (359) эту зависимость можно переписать так:

$$\varepsilon_{\delta c}^*(t) = \frac{1}{E(t)} \left\{ \sigma(t, z) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau, z) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{\rho_1} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} \right] \left[ \sigma(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \frac{\sigma_{ac}^*(t)}{n(t)} \right] \right\}. \quad (379)$$

Для случая  $\sigma(t, z) = \sigma(\tau_1, z)$  и  $E(t) = E(\tau_1)$  эту формулу нетрудно записать в виде

$$\varepsilon_{\delta c}^*(t) = \frac{1}{E(\tau_1)} \left\{ [1 + \varphi(t, \tau_1)] \sigma(\tau_1, z) - \frac{\sigma(\tau_1)}{\rho_1} \left[ 1 + (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ (1 + \varphi(t, \tau_1)) - \frac{H_{ac}^*(t, \tau_1)}{1 + \mu \rho_1 n(\tau_1)} \right] \right\}. \quad (380)$$

Подстановка в (377) выражений для  $\varepsilon_{\delta}^*(h_1, t)$  и  $\varepsilon_{\delta}^*(-h_2, t)$  приводит к формуле для кривизны

$$\kappa^*(t) = \frac{1}{h_0 E(\tau_1)} \left\{ -[k_1 \sigma + \sigma(-h_2)] [1 + \varphi(t, \tau_1)] + \right. \\ \left. + \frac{(1 + k_1) H_{ac}^*(t, \tau_1)}{1 + \mu \rho_1 n(\tau_1)} \sigma \right\}, \quad (381)$$

где  $k_1 = [-h_1 + (\rho_1 - 1)h_2]/\rho_1 h_1$ ;  $\sigma = \sigma(\tau_1)$ , а  $\sigma(-h_2)$  подсчитывается, согласно (374), при  $z = -h_2$ ,  $t = \tau_1$ .

Если пренебречь весьма незначительным влиянием на изгиб стержня нормальной силы  $N$ , т. е. считать, что  $\sigma(z, \tau_1) = Jz/J_0$ , то зависимость (381) может быть представлена в форме

$$\kappa^*(t) = \frac{M}{B^*(t)}, \quad (382)$$

где

$$B^*(t) = \frac{E J_0 \rho_1}{1 + \varphi(t, \tau_1) + \frac{\rho_1 - 1}{1 + \mu \rho_1 n(\tau_1)} H_{ac}(t, \tau_1)}; \quad (383) \\ B(\tau_1) = \frac{E J_0 [1 + \mu \rho_1 n(\tau_1)]}{1 + \mu n(\tau_1)}.$$

При переменных внешних нагрузках и интенсивно стареющем бетоне зависимость (379) приходится представлять в матричной форме

$$\vec{\varepsilon}_{\delta c} = E^{-1} \Delta \delta \vec{\sigma}(z) - \frac{1}{\rho_1} \left[ 1 + (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} \right] \left[ E^{-1} \Delta \delta \vec{\sigma} - \frac{1}{E_a} \vec{\sigma}_{ac}^* \right], \quad (384)$$

где  $E^{-1}$  — диагональная матрица, элементами которой являются  $1/E(\tau_1)$ ,  $1/E(t_1)$ , ...,  $1/E(t_n)$ . Записав выражение (377) в матричной форме и подставив в него значения  $\varepsilon_{\delta c}^*(h_1)$  и  $\varepsilon_{\delta c}^*(-h_2)$ , после преобразований получим вектор

$$\vec{\kappa}^* = h_0^{-1} \left\{ E^{-1} \Delta \delta \left[ -k_1 \sigma - \sigma(-h_2) \right] + \frac{1 + k_1}{E_a \mu \rho_1} (n + \Delta \delta)^{-1} \Delta \delta \vec{\sigma} \right\}, \quad (385)$$

где значения  $\sigma(-h_2)$  и  $k_1$  такие же, как в (381).

Если  $N(t) = 0$ , то зависимость (385) можно представить так:

$$\vec{x}^* = \frac{1}{J_6 \rho_1} \left[ E^{-1} + \frac{\rho_1 - 1}{\mu \rho_1 E_a} (n + \Delta \delta)^{-1} \right] \Delta \delta \vec{M} \quad (386)$$

и получить формулу для вектора величин, обратных условной длительной жесткости  $B^*$  [см. (369)],

$$\vec{B}^{*-1} = \frac{1}{J_6 \rho_1} \mathbf{B}_1 \vec{\zeta}. \quad (387)$$

Элементы нижней треугольной матрицы  $\mathbf{B}_1$  подсчитываются так же, как элементы матрицы  $\mathbf{B}$ , полагая, что  $m_{ij}$  являются элементами матрицы, стоящей в квадратных скобках выражения (386).

Напряжения в бетоне, вызванные предварительным обжатием, согласно (376) и (341) могут быть представлены так:

$$\sigma_{\text{бд}}^*(z, t) = \sigma_{\text{бд}}^*(t) K(z); \quad K(z) = \frac{1}{\rho_1} \left[ 1 + (\rho_1 - 1) \frac{z}{h_1} \right]. \quad (388)$$

С учетом этого и (342) формула для определения деформаций принимает вид  $\varepsilon_{\text{б0}} = 0$ )

$$\varepsilon_{\text{б}}^*(z, t) = \frac{K(z)}{E(t)} \left[ \sigma_{\text{бд}}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_{\text{бд}}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]. \quad (389)$$

С помощью уравнения (343) при  $\sigma(t) = 0$  нетрудно показать, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равно  $\sigma_{\text{бд}}(t) H_{\text{ас}}(t, \tau_1)$ . Поэтому

$$\varepsilon_{\text{б}}^*(z, t) = \varepsilon_{\text{б}}(z, t) H_{\text{ас}}(t, \tau_1); \quad \varepsilon_{\text{б}}(z, t) = \frac{K(z)}{E(t)} \sigma_{\text{бд}}(t), \quad (390)$$

где  $\varepsilon_{\text{б}}(z, t)$  — решение упругомгновенной задачи.

Следовательно,

$$x^*(t) = x(t) H_{\text{ас}}(t, \tau_1); \quad x(t) = \frac{M}{B_{\text{бд}}}; \quad M = \frac{\sigma_0 F_a h_1}{1 + \mu n(t)}, \quad (391^*)$$

причем

$$B^*(t) = \frac{B(t)}{H_{\text{ас}}(t, \tau_1)}, \quad (392)$$

а  $B(t)$  определяется применительно ко второй формуле (389) (заменяв  $\tau_1$  на  $t$ ).

\* Значение  $M$  при натяжении на упоры.

**Железобетонные стержни с двойной несимметричной арматурой.** Выше детально рассмотрено поведение железобетонных элементов, у которых напряжения во всех арматурных стержнях равны (см. рис. 47). Если это условие не выполняется, то задача расчета напряженного состояния существенно усложняется, поскольку приходится строить решение, удовлетворяющее не одному, а нескольким условиям совместности деформаций (340). Такое решение ниже показано на примере железобетонного стержня с двойной несимметричной арматурой. Поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии. Напряженное состояние стержня создается в результате предварительного обжатия бетона, связанного с вынужденными деформациями нижней и верхней арматуры  $\Delta_a$  и  $\Delta'_a$ , и действия внешней нагрузки, вызывающей изгибающий момент  $M(t)$  (чистый изгиб). Если принять предпосылки, которые были использованы при рассмотрении стержней, показанных на рис. 47, то определение напряжений в бетоне на уровнях нижней  $\sigma_0^*(t)$  и верхней арматуры  $\sigma_0'^*(t)$  может быть сведено к решению системы, состоящей из двух интегральных уравнений:

$$-\sigma_0^*(t) [\rho_2 + \mu \rho_c n(t)] + \sigma_0'^*(t) \rho_{12} + \mu \rho_c E_a \times \\ \times \int_{\tau_1}^t \sigma_0^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \Phi_1(t); \quad (393)$$

$$-\sigma_0'^*(t) [\rho_1 + \mu' \rho_c n(t)] + \sigma_0^*(t) \rho_{12} + \mu' \rho_c E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_0'^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \Phi_2(t),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t) &= \Delta_a E_a \mu \rho_c - M(t) \frac{h_1 + h_2}{J_b}; \\ \Phi_2(t) &= \Delta'_a E_a \mu' \rho_c + M(t) \frac{h_1 + h_2}{J_b}; \\ \rho_1 &= 1 + \frac{h_1^2}{r_0^2}; \quad \rho_2 = 1 + \frac{h_2^2}{r_0^2}; \quad \rho_{12} = 1 - \frac{h_1 h_2}{r_0^2}; \\ \rho_c &= \rho_1 \rho_2 - \rho_{12}^2; \quad r_0^2 = \frac{J_b}{F_b}; \quad \mu = \frac{F_a}{F_b}; \quad \mu' = \frac{F'_a}{F_b}; \end{aligned} \right\} \quad (394)$$

$h_1$  и  $h_2$  — расстояния между центрами тяжести сечений — бетонного, растянутой и сжатой арматуры. Напряжения в нижней  $\sigma_a^*(t)$  и верхней арматуре  $\sigma_a'^*(t)$  подсчитываются по формулам:

ваются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a^*(t) &= \frac{1}{\mu \rho_c} \left[ -\sigma_0^*(t) \rho_2 + \sigma_0'^*(t) \rho_{12} + M(t) \frac{h_1 + h_2}{J_0} \right]; \\ \sigma_a'^*(t) &= \frac{1}{\mu' \rho_c} \left[ \sigma_0^*(t) \rho_{12} - \sigma_0'^*(t) \rho_1 - M(t) \frac{h_1 + h_2}{J_0} \right]. \end{aligned} \right\} (395)$$

При аппроксимациях  $\delta(t, \tau)$  с помощью выражений, учитывающих старение бетона, решение системы уравнений (393) в аналитической форме наталкивается на серьезные трудности математического характера. Если выделить из уравнений этой системы интегральные операторы  $1 - EK$  [см. (139)], ограничить задачу определением искомым величин в наперед заданные моменты времени и использовать равенство (140), то можно свести задачу к последовательному решению двух алгебраических уравнений. В п. 3 этой главы такое решение проиллюстрировано на примере тела произвольной формы, усиленного упругими связями.

При аппроксимации  $C(t, \tau)$  согласно (49) при  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = 0$ , а также  $M(t) = M(\tau_1) = \text{const}$  решение уравнений (393) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0^*(t) &= \sigma_0^*(\infty) + \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_2 - \eta_1} \left[ \left( -\frac{1}{\eta_2} \delta\sigma_0 + \delta\sigma_0' \right) e^{-r_1 \delta t} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\eta_1} \delta\sigma_0 - \delta\sigma_0' \right) e^{-r_2 \delta t} \right]; \\ \sigma_0'^*(t) &= \sigma_0'^*(\infty) + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left[ (-\delta\sigma_0 + \eta_2 \delta\sigma_0') e^{-r_1 \delta t} + \right. \\ &\quad \left. + (\delta\sigma_0 - \eta_1 \delta\sigma_0') e^{-r_2 \delta t} \right], \end{aligned} \right\} (396)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0^*(\infty) &= -\frac{\Phi_1 b_2 + \Phi_2 \rho_{12}}{b_1 b_2 - \rho_{12}^2}; \quad \sigma_0'^*(\infty) = -\frac{\Phi_1 \rho_{12} + \Phi_2 b_1}{b_1 b_2 - \rho_{12}^2}; \\ \delta\sigma_0 &= \sigma_0(\tau_1) - \sigma_0^*(\infty); \quad \delta\sigma_0' = \sigma_0'(\tau_1) - \sigma_0'^*(\infty); \quad \delta t = t - \tau_1; \\ \eta_1 &= -\frac{r_1 - \gamma_1}{b_1 \gamma_1 - a_1 r_1} \rho_{12}; \quad \eta_2 = -\frac{r_2 - \gamma_1}{b_1 \gamma_1 - a_1 r_2} \rho_{12}; \\ r_{1,2} &= \gamma_1 \left\{ \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2\rho_{12}^2}{2(a_1 a_2 - \rho_{12}^2)} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left[ \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2\rho_{12}^2}{2(a_1 a_2 - \rho_{12}^2)} \right]^2 - \frac{b_1 b_2 - \rho_{12}^2}{a_1 a_2 - \rho_{12}^2}} \right\}; \\ a_1 &= \rho_2 + \mu \rho_c n; \quad b_1 = \rho_2 + \mu \rho_c n (1 + c); \\ a_2 &= \rho_1 + \mu' \rho_c n; \quad b_2 = \rho_1 + \mu' \rho_c n (1 + c). \end{aligned} \right\} (397)$$

Напряжения в бетоне в начальный момент времени  $\sigma_0$  ( $\tau_1$  и  $\sigma'_0$  ( $\tau_1$ )) подсчитываются с помощью формул для  $\sigma'_0$  ( $\infty$ ) и  $\sigma'_0$  ( $\infty$ ), полагая при определении  $b_1$  и  $b_2$  предельную характеристику ползучести  $c$  равной нулю.

### 3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТЬЮ И УСИЛЕННОГО УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

Поставим задачу определения влияния ползучести и старения на напряженно-деформированное состояние однородного изотропного тела (элемента, конструкции) произвольной формы, армированного  $j$  упругими связями (рис. 49, а). Тело может быть свободно или прикреплено к основанию абсолютно жесткими связями. Упругие связи расположены в идеально гладких каналах, прикреплены к телу у его поверхности и способны воспринимать растягивающие и сжимающие усилия [94].

Напряженное состояние системы (тело — упругие связи) создается как внешними нагрузками  $P(t)$  и вынужденными деформациями тела  $u_{0j}(t)$  (усадка, температура и т. д.), так и предварительным напряжением упругих связей, представляемых через вынужденные деформации  $u_{nj}(t)$ .

Если упругомгновенные перемещения тела от внешней нагрузки в направлении  $j$  представить в виде

$$u_j(t) = \frac{n'_{0j} L_j P(t)}{F_j E(t)}, \quad (398)$$

то для полных перемещений, т. е. перемещений, определяемых с учетом линейной ползучести, в соответствии с (172) можно получить такую формулу:

$$u_j^*(t) = \frac{n'_{0j} L_j}{F_j E(t)} \left[ P(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t P(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]. \quad (399)$$

В зависимостях (398) и (399):  $L_j$  — длина тела в направлении  $j$ ;  $F_j$  — площадь произвольного поперечного сечения тела с нормалью  $j$ ;  $n'_0$  — коэффициент, связанный с геометрией и условиями закрепления тела;  $P(t)$  — обобщенная сила, вызывающая перемещение.

Формула (399) справедлива при тех же условиях, что и (179), т. е. при удовлетворении равенства (64), и условиях на контуре, не зависящих от ползучести (см. п. 1 гл. IV).

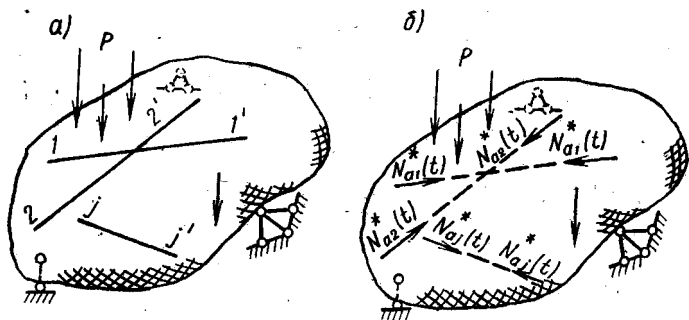


Рис. 48. Тело произвольной формы, усиленное упругими связями  
 а — заданная система; б — основная система метода сил

При решении задач по методу сил лишние неизвестные, т. е. усилия в упругих связях  $N_{a1}^*(t)$ ,  $N_{a2}^*(t)$ , ...,  $N_{aj}^*(t)$ , определяются из условия совместности перемещения связей и тела в точках  $1-1$ ,  $2-2$ , ...,  $j-j'$  (рис. 48, б).

$$u_1^*(t) = u_{a1}^*(t), \quad u_2^*(t) = u_{a2}^*(t), \quad \dots, \quad u_j^*(t) = u_{aj}^*(t). \quad (400)$$

Учитывая формулу (399) и принцип наложения, перемещение в момент времени  $t$  точки тела  $j$  относительно точки  $j'$  в направлении силы  $N_{aj}(t)$ , т. е.  $u_j^*(t)$ , может быть представлено в виде суммы:

$$u_j^* = \frac{1}{E_j} [\delta_{j1}(1-EK) N_{a1}^* + \delta_{j2}(1-EK) N_{a2}^* + \dots + \delta_{jj}(1-EK) N_{aj} + \delta_{jp}(1-EK) P(t)] + u_{0j}. \quad (401)$$

Соответствующее перемещение  $j$ -й упругой связи

$$u_{aj}^* = -\frac{N_{aj} L_j}{F_j E_j} + u_{nj}. \quad (402)$$

В этих формулах:  $\delta_{jk}$  — постоянные коэффициенты, определяемые при решении упругомгновенной задачи и равные умноженным на  $E(t)$  значениям взаимных перемещений точек  $j$  и  $j'$  при действии сил  $N_{ak} = 1$  [см. (399)];  $u_{0j}$  — взаимное перемещение точек тела  $j$  и  $j'$  вследствие вынужденных деформаций;  $u_{nj}$  — взаимное перемещение концов арматуры, соответствующее усилию предварительного напряжения;  $L_j$ ,  $F_j$  и  $E_j$  — длина, площадь поперечного сечения и модуль упругости  $j$ -й упругой связи;

$$(1-EK) \dot{N}_{aj}^* = N_{aj}^*(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t N_{aj}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (403)$$





Входящие в (406) матрицы  $\Delta\delta$  строятся согласно (141) и (142);  $\delta(t_n, \xi)_{k-1}^{t_n}$  определяются по (144); вектор  $\vec{P}$ , матрица  $E$  и вектор  $u_{nj} - u_{0j}$  записываются так:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P(\tau_1) \\ P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} E(\tau_1) & & & \\ & E(t_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & E(t_n) \end{pmatrix}, \vec{u}_{nj} - u_{0j} = \begin{pmatrix} u_{n1}(\tau_1) - u_{01}(\tau_1) \\ u_{n2}(t_1) - u_{02}(t_1) \\ \vdots \\ u_{nj}(t_n) - u_{0j}(t_n) \end{pmatrix} \quad (407)$$

Благодаря треугольной форме матрицы  $\Delta\delta$  решение системы матричных уравнений, т. е. определение усилий в связях, заключается в последовательном решении систем алгебраических уравнений.

После определения усилий в упругих связях напряжения в теле подсчитываются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^*(t) &= \sigma_{xc}(t) + \sigma_{x1} N_{a1}^*(t) + \sigma_{x2} N_{a2}^*(t) + \dots + \sigma_{xj} N_{aj}^*(t) \\ \tau_{xy}^*(t) &= \tau_{xyc}(t) + \tau_{xy1} N_{a1}^*(t) + \tau_{xy2} N_{a2}^*(t) + \dots + \tau_{xyj} N_{aj}^*(t), \end{aligned} \right\} \quad (408)$$

где через  $\sigma_{xc}, \dots, \tau_{xyc}$  обозначены напряжения в теле, не имеющем упругих связей, вызванные внешними силами и вынужденными деформациями;  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xj}, \dots, \tau_{xy1}, \dots, \tau_{xyj}$  — напряжения от сил  $N_{a1}, N_{a2}, \dots, N_{aj}$ , равных единице.

Вектор перемещений точек тела в произвольных направлениях в моменты времени  $\tau_1, t_1, \dots, t_n$  определяется с помощью зависимости, аналогичной (401), с использованием (405).

Для более наглядного представления о возможностях изложенной методики далее приведены данные о результатах расчета железобетонной складки, изображенной на рис. 49 [94]. Складка загружена равномерно распределенной вертикальной нагрузкой, интенсивность которой равна: на участке 1-й и 7-й граней складки — 9 кН/м<sup>2</sup>; 2-й грани — 10,5 кН/м<sup>2</sup>; 3-й грани — 5 кН/м<sup>2</sup>; 4-й и 6-й граней — 4 кН/м<sup>2</sup>; 5-й грани — 3,5 кН/м<sup>2</sup>. Толщины 1-й, 2-й, 7-й граней — 0,3 м, 3-й — 0,1 м; 4-й и 5-й — 0,06 м, 6-й — 0,08 м. Предполагалось, что оболочка изготовлена из бето-

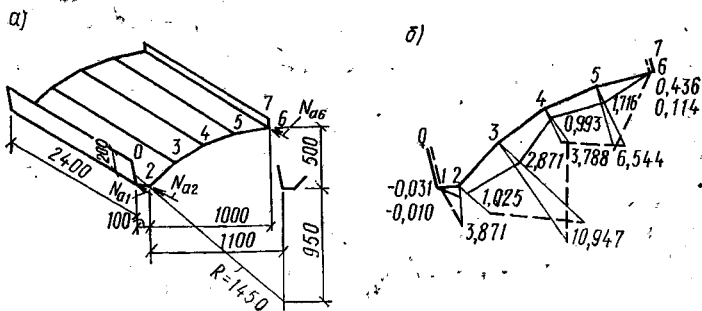


Рис. 49. Железобетонная складка, усиленная продольной предварительно-напряженной арматурой  
 а — схема складки; б — вертикальные перемещения ребер складки посередине пролета; см; — при  $\tau_1=28$  сут; - - - при  $t=1000$  сут

на, исследованного в опытах [96], причем аппроксимации  $E(\tau)$  и  $C(t, \tau)$  выполнены применительно к (48) и (85) так

$$\left. \begin{aligned}
 E(\tau) &= 3,45 \cdot 10^4 (1 - 0,484e^{-0,04\tau}) \text{ МПа;} \\
 C(t, \tau) &= \left\{ \left( 1 + \frac{204}{\tau} \right) [0,3 (1 - e^{-0,06(t-\tau)}) + 0,5 \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - e^{-0,04(t-\tau)})] + 2,7 (e^{-0,002\tau} - e^{-0,002t}) \right\} \times \\
 &\quad \times 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}.
 \end{aligned} \right\} (40)$$

Матрица  $\Delta\delta$  принята девятого порядка; усилия вычислены при  $t_i = 28, 32, 40, 60, 90, 150, 300, 600$  и  $1000$  сут.

Предварительно-напряженная арматура состоит из трех пучков: в ребре 1 — арматурная прядь,  $F_{a1} = 1,1 \text{ см}^2$ ,  $E_{a1} = 180\,000 \text{ МПа}$ ; в ребре 2 — трос,  $F_{a2} = 15,8 \text{ см}^2$ ,  $E_{a2} = 160\,000 \text{ МПа}$ ; в ребре 6 — трос,  $F_{a6} = 10,5 \text{ см}^2$ ,  $E_{a6} = 160\,000 \text{ МПа}$ .

Приложение внешней нагрузки и создание предварительного напряжения производилось в один и тот же момент времени при  $\tau_1 = 28$  сут. Усилия предварительного обжатия:  $N_{a1}(28) = 100 \text{ кН}$ ,  $N_{a2}(28) = 1500 \text{ кН}$ ,  $N_{a6}(28) = 1000 \text{ кН}$ .

Расчет складки в упругой стадии при  $\tau_1 = 28$  сут на действие внешней нагрузки и сосредоточенных сил  $N_{a1} = 100$ ,  $N_{a2} = 1500$ ,  $N_{a6} = 1000$ , приложенных к торцам складки в местах анкеровки пучков предварительно-напряженной арматуры выполнен согласно [95]. В многоволновом покрытии, элементом которого является рассматриваемая складка, гра

Таблица 21. Усилия в арматуре складки

| Возраст $t$ , сут | $N_{a1}^*$ , кН |  |           | $N_{a2}^*$ , кН |  |           | $N_{a6}^*$ , кН |  |           |
|-------------------|-----------------|--|-----------|-----------------|--|-----------|-----------------|--|-----------|
|                   | от нагрузки     | от предвари-<br>тельного<br>напряжения | суммарное | от нагрузки     | от предвари-<br>тельного<br>напряжения | суммарное | от нагрузки     | от предвари-<br>тельного<br>напряжения | суммарное |
| 28                | 0,56            | 99,44                                  | 100       | 15,1            | 1484,9                                 | 1500      | 15,66           | 984,34                                 | 1000      |
| 1000              | 2,08            | 97,54                                  | 99,62     | 56,54           | 1440,71                                | 1497,25   | 58              | 940,76                                 | 998,76    |

ни 0—1 и 6—7 соседних складок лежат в одной плоскости; изгибные перемещения в этой плоскости приняты равными нулю.

Поскольку рассматриваемая складка является телом, усиленным тремя упругими связями, то основная задача состояла в вычислении усилий  $N_{a1}$ ,  $N_{a2}$  и  $N_{a6}$  в последовательно возрастающие моменты времени. В табл. 21 приведены значения этих усилий, в табл. 22 — значения нормальных напряжений в поперечных сечениях складки  $\sigma (L/2)$  и изгибающих моментов в продольных сечениях  $M (L/2)$  у середины пролета. Вертикальные перемещения ребер складки посередине пролета при  $\tau_1 = 28$  сут и  $t = 1000$  сут приведены на рис. 51.

Весьма незначительное изменение усилий во времени в среднем поперечном сечении складки связано: с малым коэффициентом армирования; выбором таких значений усилий предварительного напряжения, при которых суммарные нормальные напряжения в бетоне у мест расположения арматуры весьма малы; одновременным приложением внешней нагрузки и введением предварительного напряжения.

Таблица 22. Нормальные напряжения  $\sigma (L/2)$  и изгибающие моменты  $M (L/2)$  в складке

| № точки поперечного сечения | $\sigma (L/2)$ , МПа |          | $M (L/2)$ , кН·м/м |          |
|-----------------------------|----------------------|----------|--------------------|----------|
|                             | 28 сут               | 1000 сут | 28 сут             | 1000 сут |
| 1                           | -0,306               | -0,303   | —                  | —        |
| 2                           | -0,18                | -0,174   | -5,173             | -5,189   |
| 3                           | -4,949               | -4,95    | -2,947             | -2,949   |
| 4                           | -5,814               | -5,815   | -2,022             | -2,023   |
| 5                           | -4,285               | -4,283   | -2,171             | -2,17    |
| 6                           | -0,127               | -0,121   | —                  | —        |

#### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

Вывод уравнения состояния сжатого или растянутого стержня. Изложенные методики позволяют рассчитывать железобетонные конструкции при длительных воздействиях, в частности, выполнять расчеты по второму предельному состоянию. Однако применимость этих методик ограничена областью, в которой длительные деформации бетона могут быть описаны с помощью линейной теории ползучести, т. е. случаями, когда выполняется условие  $\sigma \leq 0,5R_{пр}$ . Если это условие не выполняется, например при предварительном обжатии бетона, необходимо использовать зависимости нелинейной теории ползучести (294), (296). Если деформации в арматуре принять по (342), а в бетоне по (294), то условие (340) с помощью (341) может быть представлено в виде нелинейного интегрального уравнения относительно неизвестного  $\sigma_a^*(t)$ :

$$\sigma_0^*(t) - \frac{\mu E_a}{1 + \mu n(t)} \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_0^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} + F_1 [\sigma_0^*(\tau)] \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial C_H(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = \sigma_0(t), \quad (410)$$

где

$$\sigma_0(t) = \frac{\sigma(t) + \mu E_a [\varepsilon_{ac}(t) - \varepsilon_{\beta 0}(t)]}{1 + \mu n(t)}; \quad \sigma(t) = N(t)/F_0; \\ \mu = F_a/F_0; \quad n(t) = E_a/E(t). \quad (411)$$

Нетрудно заметить, что  $\sigma_0(t)$  есть решение соответствующей упругомгновенной задачи.

В случае применения зависимости (296) уравнение (410) принимает вид

$$\sigma_0^*(t) - \frac{\mu E_a}{1 + \mu n(t)} \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_0^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} + F [\sigma_0^*(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau = \sigma_0(t). \quad (412)$$

После разыскания напряжений в бетоне  $\sigma_0^*(t)$  напряжения в арматуре могут быть подсчитаны по формуле

$$\sigma_a^*(t) = \frac{1}{\mu} [\sigma(t) - \sigma_0^*(t)], \quad (413)$$

следующей из условия равновесия. При  $N(t) = 0$ ,  $\varepsilon_{\sigma 0}(t) = 0$ ,  $\varepsilon_{ac}(t) = -\Delta$  уравнение (410) или (412) и формула (413) при  $\sigma(t) = 0$  позволяют определить напряжение в арматуре, вызванное предварительным напряжением  $\sigma_{ад}^*(t)$ , и на основании (353) и (354) подсчитать потери напряжений от ползучести бетона.

Решение на основе нелинейной теории старения для железобетонного стержня обычно строится с использованием уравнения (412) [119]. В данном случае, согласно (91),

$$C(t, \tau) = \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{E(0)}; \quad \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{E(0)} \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}. \quad (414)$$

С учетом (414) уравнение (412) принимает вид

$$\sigma_0^*(t) - \frac{\mu E_a}{1 + \mu n(t)} \int_0^t \left\{ \sigma_0^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E\tau} - F[\sigma_0^*(\tau)] \frac{1}{E(0)} \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau = \sigma_0(t). \quad (415)$$

При постоянных вынужденных деформациях и внешних силах

$$\sigma_0(t) = \frac{\mu E_a [\varepsilon_{a0} - \varepsilon_{\sigma 0}] + \sigma}{1 + \mu n(t)} \quad (416)$$

интегральное уравнение (415) путем преобразований и дифференцирования по  $t$  сводится к дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{1}{E(t)} + \frac{1}{\mu E_a} \right) \frac{d\sigma_0^*(t)}{dt} + \frac{1}{E(0)} F[\sigma_0^*(t)] \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0. \quad (417)$$

Выразив, как это обычно делается в теории старения, изменение  $E(t)$  через изменение  $\varphi(t)$

$$E(t) = E(0) [1 + \delta\varphi(t)] \quad (418)$$

и выполнив простейшие преобразования, можно (417) переписать в виде

$$\int_{\sigma_0^*(0)}^{\sigma_0^*(t)} \frac{d\sigma_0^*(t)}{F[\sigma_0^*(t)]} = -\lambda_n(t) \varphi(t), \quad (419)$$

где

$$\lambda_n(t) = \int_0^{\varphi(t)} \frac{\mu n [1 + \delta\varphi(t)]}{1 + \mu n + \delta\varphi(t)} d\varphi(t); \quad n = \frac{E_a}{E(0)}. \quad (420)$$

При учете увеличения модуля упругомгновенных деформаций во времени, согласно (418),

$$\lambda_n(t) = \mu n \left( 1 - \frac{\mu n}{\delta \varphi(t)} \ln \frac{1 + \mu n + \delta \varphi(t)}{1 + \mu n} \right), \quad (42)$$

при  $E(t) = E(0) = \text{const}$  [см. (350)]:

$$[\lambda_n(t) = \lambda = \mu n / (1 + \mu n)]. \quad (42)$$

Если принять функцию напряжений в виде (14), то из (41) следует зависимость

$$\sigma_\sigma^*(t) = \frac{\sigma_\sigma(0)}{1 + \beta_1 \sigma_\sigma(0) [1 - e^{-\lambda_n(t) \varphi(t)}]} e^{-\lambda_n(t) \varphi(t)}, \quad (42)$$

причем для определения  $\sigma_\sigma(0)$  служит формула (416).

Уравнение (419) с помощью (18) позволяет получить формулу для определения  $\sigma_\sigma^*(t)$  с учетом быстро проходящего характера нелинейной составляющей деформаций ползучести. Для построения решения уравнения (419) в замкнутой форме с учетом того, что уменьшение во времени функции  $\eta(t)$  (18) в случае  $E(t) = E(0) = \text{const}$  аналогично уменьшению напряжений в бетоне, подсчитанному в линейной теории старения [например, по (423), при  $\beta_1 = 0$  выражение (18) приближенно можно представить в виде [132]

$$F[\sigma_\sigma^*(t)] = R_0 \eta(t) \left\{ 1 + \vartheta_0 \left[ \frac{\eta(t)}{\eta(0)} \right] \eta^n(t) \right\}, \quad (42)$$

где

$$p = s_1 / \lambda; \quad \eta(0) = \sigma(0) / R_0, \quad (42)$$

$\lambda$  определяется согласно (422),  $R_0$  — прочность бетона при загрузении (предварительном обжатии).

Подстановка (424) в (419) после некоторых преобразований приводит к выражению [132]

$$\sigma_\sigma^*(t) = \sigma_\sigma(0) \frac{e^{-\lambda \varphi(t)}}{\{1 + \vartheta_0 [\eta(0)]^n [1 - e^{-(n+p) \lambda \varphi(t)}]\}^{\frac{1}{n+p}}}. \quad (42)$$

Достоинства формулы (426) заключаются в компактном описании достаточно сложного процесса и в возможности пользоваться ею для выполнения практических расчетов, поскольку постоянные  $s$ ,  $n$ ,  $\vartheta_0$  удобны для нормирования [6]. К сожалению, частичная обратимость деформаций ползучести не учитывается, что характерно для теории старения.

связи с этим выражение (426) завышает уменьшение напряжений в бетоне, что искусственно увеличивает потери.

Сопоставления показали, что величины потерь усилий предварительного напряжения, вычисленные на основе (426), в среднем на 10% превышают величины потерь, вычисленные по нелинейной наследственной теории старения.

Решение на основе наследственной теории старения. При использовании для определения  $C(t, \tau)$  и  $C_n(t, \tau)$  выражений, производные которых по  $\tau$  зависят от  $t$  и  $\tau$ , решение уравнений (410) и (412) наталкивается на достаточно серьезные трудности математического характера. Поэтому удобно и в данном случае переходить к численным решениям. Аналогия между уравнениями (410) и (306), а также сказанное при обосновании зависимостей (308) и (140) позволяют показать возможность выделения из (410) такого матричного уравнения:

$$(n + \Delta\delta)\vec{\sigma}_{\sigma c}^* + \Delta C_n \vec{F}(\vec{\sigma}_{\sigma c}^*) = \vec{p}\sigma. \quad (427)^*$$

Обозначения векторов и матриц, входящих в это уравнение, приведены ранее, применительно к формулам (310) и (357). Поскольку в данном случае рассматривается простое сжатие или растяжение железобетонного стержня, то при вычислении элементов матрицы  $n$  необходимо в (358) принимать  $\rho_1 = 1$ .

Уравнение (427) записано применительно к случаю действия только силы  $N(t)$ ; при наличии вынужденных деформаций элементы вектора  $\vec{\sigma}$  принимаются равными второму слагаемому числителя первой формулы (411).

В табл. 23 приведены значения  $A^*(\infty)$ , характеризующие потери усилий предварительного напряжения в железобетонном стержне (354). Значения  $H_b^*(\infty, \tau_1) = H_a^*(\infty, \tau_1)$ , необходимые для подсчета  $A^*(\infty)$ , рассчитаны с помощью нелинейной наследственной теории старения (ННТС) (427), линейной наследственной теории старения (ЛНТС) (357), а также нелинейной теории старения (НТС) (426). Из табл. 23 следует: при  $\eta = 0,2; 0,5; \eta = 0,85$  и  $\mu = 0,5\%$  результаты расчетов по ННТС и ЛНТС весьма близки; при  $\mu = 3,5\%$ ,  $\eta = 0,85$  расчеты по ЛНТС заметно завышают потери; расчеты по НТС завышают потери, особенно при  $\mu = 3,5\%$ . Все это в значительной мере связано с тем, что

\* Запись уравнений в матричной форме (427) и расчеты выполнены В. И. Барановским.



Таблица 23. Коэффициенты  $A^*(\infty)$ , характеризующие по-  
 усилия предварительного напряжения в железобетонном стержне  
 имеющем поперечное сечение с двумя осями симметрии  
 и выполненном из бетона, описанного в [6]

| $\tau_1$ , сут    | $\mu$ , % | $\eta = \frac{\sigma(\tau_1)}{R_{пр}(\tau_1)}$ | $A^*(\infty)$ |       |       | Отношения, %       |                     | $H_0^*$ |
|-------------------|-----------|--|---------------|-------|-------|--------------------|---------------------|---------|
|                   |           |  | ННТС          | НТС   | ЛНТС  | $\frac{НТС}{ННТС}$ | $\frac{ЛНТС}{ННТС}$ |         |
| 4                 | 0,5       | 0,2  | 0,033         | 0,038 | 0,033 | 114                | 100                 | 0,967   |
|                   |           | 0,5  | 0,042         | 0,05  | 0,043 | 118                | 101                 | 0,958   |
|                   |           | 0,85   | 0,058         | 0,063 | 0,059 | 110                | 103                 | 0,942   |
|                   | 3,5       | 0,2  | 0,168         | 0,196 | 0,17  | 117                | 101                 | 0,832   |
|                   |           | 0,5  | 0,204         | 0,245 | 0,214 | 120                | 105                 | 0,796   |
|                   |           | 0,85   | 0,254         | 0,296 | 0,282 | 117                | 111                 | 0,746   |
| Среднее отношение |           |  |               |       |       | 116                | 104                 | —       |
| 28                | 0,5       | 0,2  | 0,02          | 0,023 | 0,02  | 117                | 100                 | 0,98    |
|                   |           | 0,5  | 0,029         | 0,034 | 0,03  | 115                | 102                 | 0,971   |
|                   |           | 0,85   | 0,044         | 0,044 | 0,046 | 100                | 104                 | 0,956   |
|                   | 3,5       | 0,2  | 0,105         | 0,128 | 0,108 | 122                | 102                 | 0,889   |
|                   |           | 0,5  | 0,141         | 0,175 | 0,153 | 125                | 109                 | 0,859   |
|                   |           | 0,85   | 0,1           | 0,222 | 0,222 | 117                | 117                 | 0,81    |
| Среднее отношение |           |  |               |       |       | 116                | 106                 | —       |

при малых  $\mu$  напряжения в бетоне  $\sigma_0^*$  во времени почти по-  
 стоянны. В расчетах по НТС не учитывается частичная об-  
 ратимость деформаций ползучести, а в расчетах по ЛНТС  
 влияние уменьшения напряжений во времени на функции  
 $f(\sigma)$ , что мало ощутимо. При больших  $\mu$  в условиях замет-  
 ного изменения  $\sigma_0^*$  соответствующие допущения приводят  
 к большим погрешностям [см. формулы (119)—(121)].

## 5. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА В ПРОЦЕССЕ ТЕРМООБРАБОТКИ

Изготовление призматического предварительно-напря-  
 женного железобетонного элемента по стендовой техноло-  
 гии производится в такой последовательности: 1) натяже-

ние арматуры на упоры; 2) укладка бетона; 3) термообработка, включающая вызревание бетона при начальной температуре, повышение температуры, изотермический прогрев и охлаждение; 4) обжатие бетона. Как правило, температура среды, окружающей элемент, может быть принята постоянной по периметру его поперечного сечения и по длине стенда.

Для описания напряженного состояния арматуры и бетона на протяжении всего процесса изготовления необходимо рассматривать систему с переменной расчетной схемой. Прежде всего образуется система, состоящая из арматуры и упоров. В процессе разогрева, до образования сцепления между бетоном и арматурой, напряжения в последней связаны с предварительным напряжением  $\sigma_{aN}$ , релаксацией  $\sigma_{ar}(t)$  и подъемом температуры в камере  $\sigma_{a\theta}(t)$ , т. е.

$$\sigma_a(t) = \sigma_{aN} + \sigma_{ar}(t) + \sigma_{a\theta}(t). \quad (428)$$

Величина напряжений (потерь)  $\sigma_{ar}(t)$  принимается по экспериментальным или нормативным данным; остальные составляющие подсчитываются по формулам

$$\sigma_{aN} = \frac{N}{F_a}; \quad \sigma_{a\theta}(t) = - \frac{\alpha E_a [l_{из} \Delta\theta_{из}(t) + l_y \Delta\theta_a(t)]}{l_{из} + l_y}; \quad (429)$$

где  $N$  — усилие предварительного напряжения;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения арматуры и бетона;  $\Delta\theta_{из}(t)$  и  $\Delta\theta_a(t)$  — приращение температуры арматуры в изделии и на свободных участках;  $l_{из}$  и  $l_y$  — длины изделия и свободных участков арматуры.

После образования к моменту  $\tau_1$  сцепления между арматурой и бетоном, достаточного для обеспечения их совместной работы, создается система, состоящая из участков свободной арматуры, изделия и упоров. В силу статической неопределимости такой системы, при изменении температуры возникают усилия в отдельных ее частях. В свободной арматуре появляется усилие  $X^*(t)$ , в обетонированной арматуре —  $N_a^*(t)$ . Можно условно считать, что источником формирования напряженного состояния призматического железобетонного элемента с приведенным поперечным сечением, имеющим две оси симметрии, при термообработке является усилие  $X^*(t)$  (рис. 50). Дополнительно к этому необходимо учесть напряжения  $\sigma_{bx\theta}(y, z, t)$ ,  $\sigma_{by\theta}(y, z, t)$ ,  $\sigma_{bz\theta}(y, z, t)$ , формирующиеся в бетоне вследствие наличия переменного по поперечному сечению градиента температурно-влажностных деформаций.

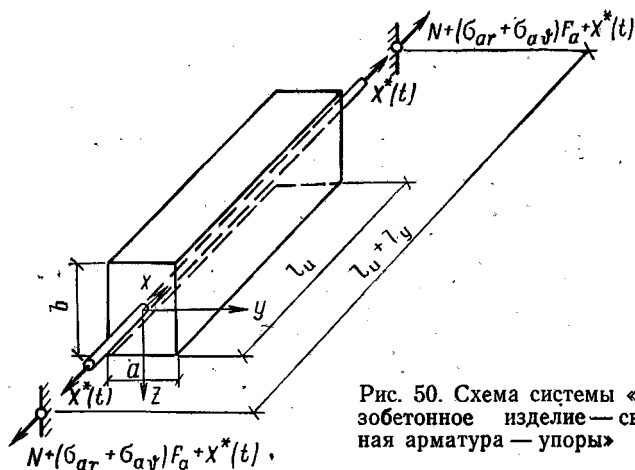


Рис. 50. Схема системы «железобетонное изделие — свободная арматура — упоры»

Таким образом, в процессе термообработки в элемент действуют следующие напряжения:

$$\sigma_a^*(t) = \sigma_{aN} + \sigma_{ar} + \sigma_{a\phi} + \sigma_{a0}(t); \quad (430)$$

$$\sigma_{\phi x}^*(y, z, t) = \sigma_{\phi}^*(t) + \sigma_{\phi x\phi}^*(y, z, t); \quad \sigma_{\phi y\phi}^*(y, z, t); \quad \sigma_{\phi z\phi}^*(y, z, t). \quad (431)$$

При этом

$$\sigma_{a0}^*(t) = \frac{N_a^*(t)}{F_a}; \quad \sigma_{\phi}^*(t) = -\mu \sigma_{a0}^*(t). \quad (432)$$

Принимая во внимание, что речь идет об определении напряжений, необходимых для проверки трещиностойкости т. е. о растягивающих напряжениях и относительно небольших сжимающих напряжениях, допустимо решать поставленную задачу на основе линейной теории ползучести. В этом случае условие равенства коэффициентов линейного температурного расширения бетона и стали позволяет весьма незначительными погрешностями определять напряжения  $\sigma_{\phi x\phi}$ ,  $\sigma_{\phi y\phi}$  и  $\sigma_{\phi z\phi}$  как для однородного и изотропного тела [см. п. 1 гл. IV].

\* Принимается:  $\sigma_{a\phi}(t) = \sigma_{a\phi}(\tau_1) = \sigma_{a\phi}$ , поскольку после появления сил сцепления в свободной арматуре происходит формирование напряжений как в элементе системы —  $\sigma_{a0}^*(t) = \sigma_{ar}(\tau_1) = \sigma_{ar}$  в силу скоропроходящего характера релаксации.

Неизвестное значение усилия  $X^*(t)$ , действующего на элемент, для любого момента времени после начала совместной работы бетона и арматуры может быть найдено с помощью уравнения совместности деформаций

$$u_a^*(t) + u_\phi^*(t) + u_\delta^*(t) = 0, \quad (433)$$

где  $u_a^*$  и  $u_\phi^*$  — суммарные изменения длин участков свободной арматуры и железобетонного изделия, вызванные усилием  $X^*(t)$ ;  $u_\delta$  — суммарное изменение длины участков свободной арматуры  $l_y \Delta\theta_a$  и железобетонного изделия на уровне арматуры  $l_n \Delta\theta_n$  вследствие приращения температуры во времени

$$u_\delta = \alpha (l_n \Delta\theta_n + l_y \Delta\theta_a); \quad (434)$$

$l_n$  — длина изделия;  $l_y$  — суммарная длина свободных от бетона участков арматуры.

Учитывая, что напряженное состояние формируется в интенсивно стареющем бетоне и является следствием переменных во времени вынужденных деформаций, для описания зависимости между силой  $X^*(t)$ , действующей на железобетонный элемент, и усилием в арматуре  $N_a^*(t)$  необходимо применить формулу (360), переписав ее соответствующим образом ( $\rho_1 = \Gamma$ )

$$\vec{N}_a^* = (n + \Delta\delta)^{-1} \Delta\delta \vec{X}^*. \quad (435)$$

Поскольку деформации арматуры равны деформациям бетона (340), то из (435) следует формула для определения суммарного изменения длины изделия

$$\vec{u}_\delta^* = \frac{l_u}{E_a F_a} (n + \Delta\delta)^{-1} \Delta\delta \vec{X}^*, \quad (436)$$

происходящего при действии силы  $X^*(t)$ .

Представление (433) и (434) в матричной форме, использование зависимости (436) и предположение о линейной связи между усилием  $X^*(t)$  и соответствующими изменениями длин участков свободной арматуры позволяют получить уравнение для определения вектора  $\vec{X}^*$

$$[\eta + (n + \Delta\delta)^{-1} \Delta\delta] \vec{X}^* = \alpha E_a F_a (\vec{\Delta\theta}_u + \eta \vec{\Delta\theta}_a), \quad (437)$$

где  $\eta$  — диагональная матрица, элементами которой являются  $\eta = l_y/l_u$ ; матрицы  $\Delta\delta$  и  $n$  формируются согласно (141) и (358), причем принимается  $\rho_1 = 1$ ; элементами векторов  $\vec{\Delta\theta}_n$  и  $\vec{\Delta\theta}_a$  являются приращения средней температуры по поперечному сечению изделия и свободной арматуры.

Напряжения  $\sigma_a^*(t)$ ,  $\sigma_{a0}^*(t)$  соответственно в свободной и бетонированной арматуре и бетоне  $\sigma_b^*(t)$ , развивающиеся в процессе термообработки, определяются по формулам:

$$\vec{\sigma}_a^* = \frac{1}{F_a} \vec{X}^*; \quad \vec{\sigma}_{a0}^* = \frac{1}{F_a} \vec{N}_a^*; \quad \vec{\sigma}_b^* = -\frac{\mu}{F_a} \vec{N}_a^*. \quad (43)$$

При спуске натяжных приспособлений в обетонированной арматуре появляются дополнительные напряжения  $\sigma_{ан}^*$ , в бетоне —  $\sigma_{бн}^*$ . В силу продолжающегося процесса охлаждения и ползучести бетона эти напряжения переменны во времени. Таким образом, после передачи усилий предварительного обжатия на бетон напряженное состояние изделия характеризуется следующими компонентами:

$$\sigma_a^*(t) = \sigma_{aN} + \sigma_{ar} + \sigma_{a\phi} + \sigma_{a0}^*(t) + \sigma_{ан}^*(t);$$

$$\sigma_{bx}^*(t) = \sigma_b^*(t) + \sigma_{bx\phi}^*(y, z, t) + \sigma_{бн}^*(t); \quad \sigma_{by\phi}^*(y, z, t); \quad \sigma_{bz\phi}^*(y, z, t). \quad (439)$$

Дополнительные напряжения  $\sigma_{ан}^*$  и  $\sigma_{бн}^*$  определяются из условия равенства нулю внешних сил, действующих на изделие и направленных вдоль арматуры. Наследственный характер рассматриваемого процесса требует удовлетворения этого условия в произвольно выбранные моменты времени<sup>1</sup>  $t_k, t_{k-1}, \dots, t_n$ . Обеспечить выполнение этого условия можно, если считать, что на изделие непрерывно действуют сжимающие силы, равные по абсолютному значению силам

$$N_{об}^*(t) = F_a [\sigma_{aN} + \sigma_{ar} + \sigma_{a\phi} + \sigma_{a0}^*(t)]. \quad (440)$$

Напряжения в арматуре удобно подсчитать с использованием формулы (435) с предварительной заменой в ней вектора  $\vec{X}^*$  вектором  $\vec{N}_{об}^*$ , элементы которого вычисляются согласно (440), но вводятся в расчет с обратным знаком. Напряжения в бетоне  $\sigma_{бн}^*(t)$  определяются из условий равновесия.

На рис. 33 показаны эпюры напряжений  $\sigma_{bx\phi}^*(y, z, t)$ , развивающиеся при термообработке в железобетонной предварительно-напряженной свае, выполненной из гидротехнического бетона; на рис. 51 — полные напряжения  $\sigma_{bx}^*(t)$ , подсчитанные по изложенной методике. При выполнении расчета учтены следующие характерные параметры сваи

<sup>1</sup>  $t_k$  — момент обжатия бетона,  $t_n$  — момент, к которому приурочено окончание расчета, в частности момент выравнивания температуры по поперечному сечению изделия.

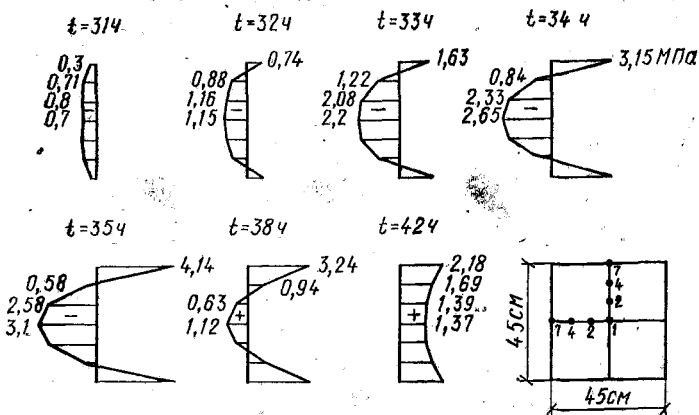


Рис. 51. Эпюры напряжений  $\sigma_{\delta x}^*(t)$ , развивающихся в поперечном сечении железобетонной сваи в процессе термообработки (без учета влияния обжатия)

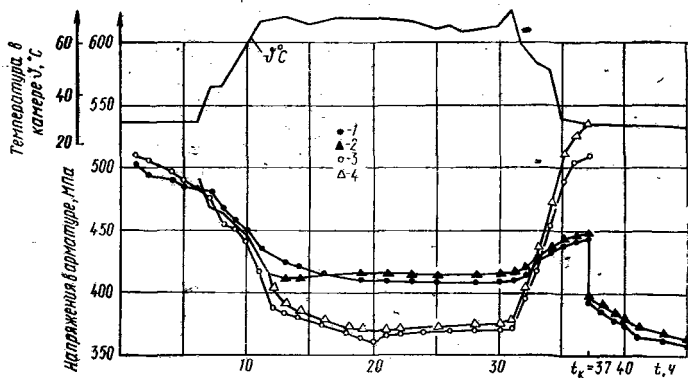


Рис. 52. Кривые, характеризующие температурный режим пропаривания и изменения напряжений в свободной и обетонированной арматуре

1 — напряжения в обетонированной арматуре, полученные экспериментально; 2 — то же, теоретически; 3 — напряжения в свободной арматуре, полученные экспериментально; 4 — то же, теоретически

и стэнда; поперечное сечение сваи  $F_6 = 45 \times 45 = 2025 \text{ см}^2$ ,  $F_a = 30,4 \text{ см}^2$ ,  $l_u = 18 \text{ м}$ ,  $l_y = 27 - 18 = 9 \text{ м}$ ; принято  $\tau_1 = 11 \text{ ч}$ .

На рис. 52 также изображена кривая, характеризующая изменение напряжений в свободной арматуре  $\sigma_a^*(t)$ , построенная по результатам расчета, а также кривая, полученная на основании замеров деформаций, выполненных в производственных условиях на Ильичевском заводе ЖБК.

Хорошее соответствие кривых, изображенных на рис. 52, отчетливо свидетельствует о достоверности расчетного определения напряжений в арматуре. Это позволяет доверять полученным данным о напряженном состоянии бетона и использовать их для контроля трещиностойкости изделия в процессе термообработки. Соответствующие проверки показали, что в случаях, если вычисленные растягивающие напряжения превышают значения  $R_p$ , происходит образование трещин. Особенно неблагоприятны в этом отношении поперечные сечения, в которых помимо напряжений  $\sigma_{6x0}^*$  формируются еще и напряжения  $\sigma_6^*$  [116, 97, 18].

## 6. ДЛИТЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЖАТОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

Задача о длительном деформировании железобетонного стержня с приведенным поперечным сечением, имеющим две оси симметрии, рассматривается на основе следующих предпосылок: бетон в растянутой зоне работает без трещин, деформации арматуры и бетона в местах контактов равны, соблюдается гипотеза плоских сечений; сжимающая сила постоянна  $P(t) = P = \text{const}$  и приложена с эксцентриситетом  $s$ , имеющим технологический характер. Связи между напряжениями и деформациями принимают в виде (342), считая, что  $\epsilon_{a0} = 0$ ,  $\epsilon_{60} = 0$ .

Запись уравнений равновесия, формул для напряжений и кривизны, а также выполнение выкладок, аналогичных приведенным в п. 4 гл. IV, позволяют получить уравнение медленного движения:

$$\begin{aligned}
 & [1 + \mu \rho_1 n(t)] \frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial z^2} + \alpha^2(t) y^*(z, t) - E(t) \times \\
 & \times \int_{\tau_1}^t \left[ \mu \rho_1 n(\tau) \frac{\partial^2 y^*(z, \tau)}{\partial z^2} + \alpha^2(\tau) y^*(z, \tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\
 & = -\alpha^2(t) E(t) \delta(t, \tau_1) s,
 \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$\mu = \frac{E_a}{F_6}; \quad \rho_1 = \frac{2h_1^2 F_6}{J_6}; \quad n(t) = \frac{E_a}{E(t)}; \quad \alpha^2(t) = \frac{P}{E(t) J_6};$$

причем  $F_a = F'_a$  — площадь поперечного сечения арматуры, расположенной у сжатой или растянутой грани;  $h_1$  — расстояние между центрами тяжести поперечных сечений бетона и одной из арматур.

При условиях опирания стержня, не зависящих от ползучести (см. п. 4 гл. IV),  $E(\tau) = E(\tau_1) = E = \text{const}$  и использовании для аппроксимации  $\delta(t, \tau)$  выражений (58) и (59) при  $\theta(\tau)$  согласно первой формуле (46) решение интегродифференциального уравнения (441) можно представить так:

$$y^*(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \left\{ \left[ 1 + \frac{B(c+a)(1-\eta_i)\bar{v}_i(\tau_1)\bar{v}_i(\tau_1)}{(\eta_i+c)\bar{v}_i(\infty)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [K_i(t, \tau_1)F_i(t) - F_i(\tau_1)] \right] \right\} \bar{Z}_i(z); \quad (442)$$

где

$$f_i = \frac{s_i}{\frac{i^2 P_6}{P} [\bar{v}_i(\tau_1) + \mu \rho_1 n] - 1}; \quad s_i = \frac{2}{l} \int_0^l s \bar{Z}_i(z) dz; \\ K_i(t, \tau_1) = \left[ \frac{\bar{v}_i(\tau_1)}{\bar{v}_i(t)} \right]^{R_i} \exp[-\gamma_1 \bar{v}_i(\infty)(\eta_i+c)(t-\tau_1)]; \\ R_i = \frac{\bar{v}_i(\infty)\eta_i B}{(1-B)\xi} - 1; \quad \eta_i = 1 - \frac{i^2 P_6}{P - \mu \rho_1 n i^2 P_6}; \\ F_i(t) = 1 + L_{i1} \bar{v}_i(t) a(t) + L_{i1} L_{i2} \bar{v}_i^2(t) a^2(t) + \dots, \\ L_{ij} = \frac{j(1-B)\xi - \bar{v}_i(\infty)\eta_i B}{i\xi + \bar{v}_i(\infty)(\eta_i+c)}, \quad (443)$$

причем

$$c = EC_0; \quad a(\tau) = EAe^{-\gamma\tau}; \quad a = EAe^{-\gamma\tau_1}; \quad \xi = \frac{\gamma}{\gamma_1}; \\ \bar{v}_0(\tau) = \frac{1}{1+(1-B)[c+a(\tau)]}; \quad \bar{v}_i(\tau) = \frac{1}{\eta_i+(1-B)[c+a(\tau)]}; \quad (444)$$



$P_6$  — критическая сила при  $\mu = 0$ ;  $Z_i(z)$  — фундаментальная функция решения соответствующей упругомгновенной задачи (при шарнирном опирании двух концов стержня)  
 $\bar{Z}_i(z) = \sin \frac{i\pi x}{l} \quad i = 1, 3, \dots$

Условия

$$\frac{i^2 P_6}{P} [\bar{v}(\tau_1) + \mu \rho_1 n] - 1 = 0, \quad \eta_i + c = 0, \quad (44)$$

следующие из первой формулы (443) и формулы (442), позволяют разыскать минимальные силы, вызывающие неограниченные развития перемещений при мгновенном ( $c + a = 0$ ) —  $P_0$ , кратковременном  $P_{кр}$  и длительном  $P_d$  действии нагрузок, т. е. критические силы

$$P_0 = P_6 (1 + \mu \rho_1 n); \quad P_{кр} = P_6 [\bar{v}(\tau_1) + \mu \rho_1 n]; \quad (44)$$

$$P_d = P_6 \left( \mu \rho_1 n + \frac{1}{1+c} \right).$$

Естественно, что поскольку железобетонные стойки разрушаются при конечных перемещениях, то силу  $P_d$  следует рассматривать только как условную оценку несущей способности сверху. Соответствующий анализ показал [79], что для стоек, исследованных в опытах [81, 114], превышение  $P_d$  над разрушающими силами составляло примерно 20%. С другой стороны, сжатые железобетонные стойки, как и любые другие элементы строительных конструкций, должны проектироваться в расчете на затухающее деформирование [см. рис. 39,  $\zeta = 4,0$ ;  $\zeta = 1 + 1,5 c$ ]. При действии сил  $P < P_d$  и относительно небольших эксцентриситетах значения амплитуд перемещений железобетонных стержней, вычисленные по формулам (442)—(444), достаточно хорошо соответствуют экспериментальным значениям (табл. 24). В силу сказанного можно сделать вывод о том, что в тех случаях, когда потеря несущей способности сжатых стержней, т. е. стержней, имеющих начальные несовершенства технологического характера, при  $t \rightarrow \infty$  происходит вследствие исчерпания несущей способности арматуры или бетона, решения, основанные на линейной теории ползучести, дают достаточно достоверные значения перемещений к моменту начала разрушения.

Полезно заметить, что формулы для определения длительных перемещений железобетонных стержней, рекомендуемые СНиП II-21-75, фактически построены на основе (265) и последней формулы (446), т. е. на основе линейной

Таблица 24. Перемещения стоек, испытанных в опытах Д. Н. Пекус-Сахновского [81] и К. Э. Таля и Е. А. Чистякова [114]

| Шифр стоек | $\frac{P}{P_d}$ | Время в момент определения перемещений $t - \tau_1$ , сут | Перемещения $f^*(t)$ , см |                           |
|------------|-----------------|---|---------------------------|---------------------------|
|            |                 |   | экспериментальные         | по формулам (442) и (444) |

Опыты Д. Н. Пекус-Сахновского

|         |       |     |       |       |
|---------|-------|-----|-------|-------|
| I-A-1   | 0,454 | 320 | 0,38  | 0,41  |
| I-A-2   | 0,454 | 320 | 0,328 | 0,347 |
| I-B-1   | 0,568 | 320 | 0,513 | 0,531 |
| I-B-2   | 0,568 | 320 | 0,242 | 0,262 |
| I-B-1   | 0,811 | 203 | 1,91  | 1,891 |
| I-B-2   | 0,811 | 251 | 1,913 | 1,899 |
| I-B-3   | 0,811 | 75  | 2     | 1,849 |
| III-A-1 | 0,267 | 320 | 0,805 | 0,823 |

Опыты К. Э. Талья и Е. А. Чистякова

|            |       |      |      |      |
|------------|-------|------|------|------|
| КГ-V-3 (1) | 0,568 | 2400 | 2,4  | 2,45 |
| КГ-V-4 (2) | 0,568 | 2400 | 1,4  | 2,45 |
| КГ-IX-5    | 0,494 | 1920 | 0,36 | 1,16 |
| КГ-IX-6    | 0,464 | 1920 | 1    | 1,16 |
| КГ-XXV-5   | 0,362 | 270  | 3,82 | 3,87 |
| КГ-XXV-6   | 0,362 | 270  | 3,5  | 3,76 |

теории ползучести. В частности, множитель, стоящий в скобках при  $J_6$  в формуле (58) СНиП II-21-75

$$P_d = \frac{6,4E}{l^2} \left[ \frac{J_6}{k_d} \left( \frac{0,1t}{0,1 + t/k_H} + 0,1 \right) + J_{ап} \right] \quad (447)$$

и учитывающий уменьшение жесткости вследствие трещинообразования, при  $e \rightarrow 0$  стремится к значению, близкому к 1,2. Если в дополнение к этому принять во внимание, что при действии только постоянных и длительных нагрузок  $k_d = 1 + \beta\phi$ , причем  $\beta = 0,5$  [125], а согласно (123) для эталонного бетона при  $\tau_1 = 28$  сут.  $c = 0,5\phi$ , то станет очевидной справедливость ранее сделанного утверждения.

Из сказанного следует, что рассматриваемые формулы применимы только тогда, когда потеря несущей способности происходит вследствие разрушения. Теоретические исследования, проведенные А. С. Линником [3] и основанные на нелинейной теории ползучести, показали, что железобетонные шарнирно-опертые стержни, имеющие прямоуголь-

ные поперечные сечения и выполненные с применением бетонов марок М200—М800, при весьма длительном действии силы, приложенной с эксцентриситетом  $s \leq l/600$ , разрушаются, если  $\lambda = l/h < 37-30$ , теряют устойчивость, если  $\lambda \geq 37-30$ .

## ГЛАВА VII

### НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ РАБОТАЮЩИХ С ТРЕЩИНАМИ

#### 1. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

**Общие положения.** Сложность формирования напряженного и деформированного состояния железобетонных стержней, работающих с трещинами, создает серьезные трудности при построении строгой теории их расчета. В 1940 г. В. И. Мурашев предложил хорошо обоснованную и получившую всеобщее признание теорию деформативности и трещиностойкости железобетонных стержней при кратковременном действии нагрузки. В теории В. И. Мурашева перемещения стержня, имеющего поперечные трещины, и, как следствие этого, переменные по длине деформации сжатой и растянутой зон, определяются по средним деформациям этих зон. Зависимости между переменными и средними деформациями устанавливаются с помощью коэффициентов  $\psi_a$  и  $\psi_b$ ; для учета пластических деформаций (быстронатекающей ползучести) сжатой зоны вводится коэффициент  $\nu$ . Дальнейшим развитием теории расчета железобетона с трещинами было создание метода расчета плоских элементов при обобщенном плоском напряженном состоянии и изгибе [52, 133].

Я. М. Немировский [73] экспериментальным путем выявил возможность распространения теории В. И. Мурашева на случай длительного действия нагрузки путем замены коэффициентов  $\psi_a$  и  $\nu$  функциями, зависящими от времени  $\psi_a(t)$  и  $\nu(t)$ . Основные предпосылки этой теории использованы А. А. Гвоздевым при разработке общего метода расчета железобетонных элементов по деформациям. Несмотря на широкое распространение метод А. А. Гвоздева имеет и не-

достатки, наиболее существенно проявляющиеся при рассмотрении длительных воздействий. Речь идет в первую очередь об отсутствии достаточно обоснованного и учитывающего меру ползучести бетона способа определения коэффициентов  $\psi_a(t)$  и  $\nu(t)$  [33]. В связи со всем сказанным появились предложения по созданию методики расчета напряженно-деформированного состояния железобетонных стержней, работающих с трещинами, основанные на решении соответствующих задач теории ползучести [63, 85, 119]. Естественным, такую методику рационально было строить так, чтобы при  $t = \tau_1$  она приводила к зависимостям теории В. И. Мурашева [85, 115, 117].

**Основные допущения и зависимости.** При определении напряженного и деформированного состояния железобетонных элементов как с обычной, так и предварительнонапряженной арматурой при длительном действии внешних нагрузок будем исходить из следующих допущений и зависимостей:

а) эпюра напряжений в сжатой зоне бетона в сечении с трещиной принимается прямоугольной;

б) в сжатой зоне бетона развиваются упругие и пластические деформации и деформации ползучести; зависимость между напряжениями  $\sigma_b^*(t)$  и полными деформациями бетона сжатой зоны  $\epsilon_b^*(t)$  принимается в виде

$$\epsilon_b^*(t) = \frac{\sigma_b^*(t)}{E_b(t)} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\sigma_b(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_b^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_b^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \quad (448)$$

где  $C(t, \tau)$  — мера ползучести бетона сжатой зоны [85];  $F[\sigma_b^*(\tau)]$  — функция напряжений [см. (11), (13)—(16)];  $E(t)$  — модуль упругомгновенных деформаций бетона в момент времени  $t$ . Коэффициент  $\nu$  вносит в деформации сжатой зоны бетона коррективы, связанные с ползучестью бетона сжатой зоны за период кратковременного действия нагрузки; с влиянием изменения напряженного и деформированного состояния балки в процессе загрузки, когда происходит образование и раскрытие трещин в бетоне растянутой зоны, а следовательно, изменение характера работы балки; с неточностями, вносимыми гипотезами, принятыми при по-

строении метода (прямоугольная эпюра напряжений в сжатой зоне и др.);

в) в растянутой зоне развиваются упругие деформации, деформации ползучести и происходит процесс трещинообразования; зависимости между напряжениями в сечении с трещиной и средними деформациями арматур принимают вид [43]

$$\varepsilon_a^{c*}(t) = \left[ \frac{\sigma_H^*(t)}{E_a} - \Delta_K \right] \Psi_a(t); \quad \varepsilon_a^{1c*}(t) = \left[ \frac{\sigma_H^{1*}(t)}{E_a} + \Delta'_K \right] \Psi_b(t), \quad (449)$$

где  $\varepsilon_a^{c*}(t)$  и  $\varepsilon_a^{1c*}(t)$  — средние деформации арматуры, расположенной в растянутой и сжатой зонах бетона;  $\Delta_K$  и  $\Delta'_K$  — вынужденные деформации арматуры при введении предварительного обжатия;  $\sigma_H^*(t)$  и  $\sigma_H^{1*}(t)$  — напряжения в арматуре, расположенной в растянутой и сжатой зонах бетона в сечении с трещиной;  $\Psi_a(t)$  и  $\Psi_b(t)$  — коэффициенты, учитывающие неравномерность по длине деформаций растянутой арматуры и бетона сжатой зоны

$$\Psi_a(t) = \varepsilon_a^{c*}(t) / \varepsilon_a^*(t); \quad \Psi_b(t) = \varepsilon_b^{c*}(t) / \varepsilon_b^*(t) \approx \varepsilon_a^{1c}(t) / \varepsilon_a^{1*}(t); \quad (450)$$

$\varepsilon_a^*(t)$ ,  $\varepsilon_a^{1*}(t)$  и  $\varepsilon_b^*(t)$  — деформации растянутой арматуры, арматуры, расположенной в сжатой зоне бетона, и деформации сжатого бетона в сечении с трещиной;

г) между средними деформациями арматуры, средними деформациями бетона и средней высотой сжатой зоны бетона  $x_c^*(t)$  существуют зависимости

$$\varepsilon_b^{c*}(t) [h_0 - x_c^*(t)] = \varepsilon_a^{c*}(t) x_c^*(t); \quad \varepsilon_b^{c*}(t) [x_c^*(t) - a'] = \varepsilon_a^{1c*}(t) x_c^*(t), \quad (451)$$

где  $h_0$  — рабочая высота сечения;  $a'$  — толщина верхнего защитного слоя бетона (рис. 53, а, б);

д) влияние усадки может быть учтено отдельно [120]

## 2. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

Рассматривается стержень со сжатой зоной, имеющей поперечное сечение прямоугольной формы с двойной предварительно напряженной арматурой. При построении решения считается, что внешняя нагрузка и предварительное обжатие вводятся одновременно в момент времени  $\tau_1$ . Условия равновесия

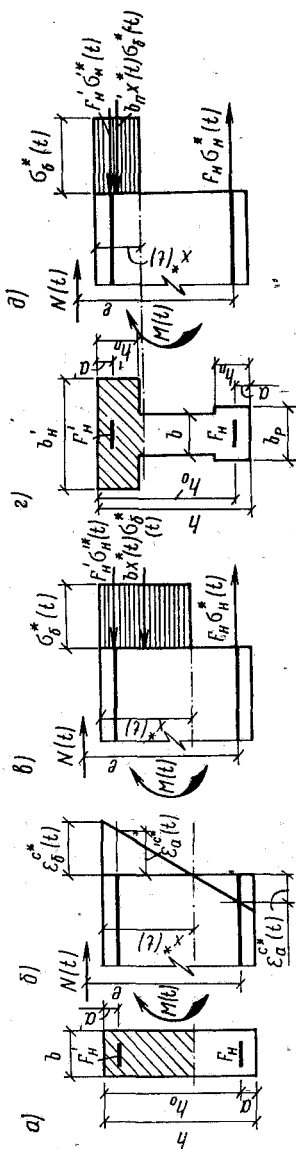


Рис. 53. Напряженное состояние железобетонного стержня в сечении с трещиной и схема распределения средних деформаций

сечении с трещиной для любого момента времени  $t$  записываются так (рис. 53):

$$bx^*(t) \sigma_6^*(t) + F'_H \sigma_H^{1*}(t) - F_H \sigma_H^*(t) - N(t) = 0; \quad (452)$$

$$bx^*(t) \sigma_6^*(t) [h_0 - 0,5x^*(t)] + F'_H \sigma_H^{1*}(t) (h_0 - a') - N(t) e - M(t) = 0, \quad (453)$$

где  $x^*(t)$  — высота сжатой зоны бетона в сечении с трещиной. Принимая зависимость между напряжениями и деформациями бетона в виде (448) и учитывая (449), уравнения (451) можно переписать в виде

$$\left\{ \frac{\sigma_6^*(t)}{E(t)} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\sigma_6(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_6^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_6^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \right\} [h_0 - x_c^*(t)] \psi_6(t) = = x_c^*(t) \psi_a(t) \left[ \frac{\sigma_H^*(t)}{E_a} - \Delta_K \right]; \quad (454)$$

$$\left\{ \frac{\sigma_6^*(t)}{E(t)} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\sigma_6(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_6^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F[\sigma_6^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \right\} [x_c^*(t) - a'] \psi_6(t) = = x_c^*(t) \psi_6'(t) \left[ \frac{\sigma_H^{1*}(t)}{E_a} + \Delta'_K \right]. \quad (455)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных функций<sup>1</sup>  $x^*$ ,  $\sigma_6^*$ ,  $\sigma_H^*$  и  $\sigma_H^{1*}$  записаны два уравнения совместности деформаций (454), (455) и два уравнения равновесия (452), (453). Решая последние относительно напряжений в арматуре, можно получить

<sup>1</sup> Здесь и далее в тексте и расчетных формулах при обозначениях, имеющих индекс «\*», для удобства чтения пропущено время  $t$ . Следует иметь в виду, что в этом случае эта величина определяется с учетом времени, например  $x^* = x^*(t)$ ,  $\sigma_6^* = \sigma_6^*(t)$ ,  $D_1^* = D_1^*(t)$  и т. д.

$$\sigma_H^* = \frac{1}{F_H (h_0 - a')} [M_3(t) - N(t) (h_0 - a') + \sigma_6^* b x^* (0,5 x^* - a')];$$

$$\sigma_H'^* = \frac{1}{F_H' (h_0 - a')} [M_3(t) - \sigma_6^* b x^* (h_0 - x^*)]; \quad M_3(t) = M(t) + N(t) e. \quad (456)$$

Напряжения в бетоне  $\sigma_6^*$  разыскиваются в предположении равенства высот сжатой зоны  $x_c^* = x^*$ . Подставив в (454), (455) значения напряжений в арматуре по (456) и произведя преобразования, получим

$$\sigma_6^* = \frac{-D_1^* x^* + D_2^*}{b x^* [0,5 (\psi^* + 1) x^{*2} - 1,5 k_1^* x^* + k_2^*]}; \quad (457)$$

$$\begin{aligned} \sigma_6^* \left[ \frac{x^{*2} (0,5 x^* - a')}{\alpha^* h_0 (h_0 - x^*) (h_0 - a')} - \nu \right] + \frac{D_3^* x^*}{\alpha^* (h_0 - x^*) b h_0 (h_0 - a')} - \\ - (1 - \nu) \sigma_6(\tau_1) \frac{E(t)}{E(\tau_1)} + \nu E(t) \left\{ \int_{\tau_1}^t \sigma_6^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\tau_1}^t F[\sigma_6^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \right\} = 0, \quad (458) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1^* &= M_c(t) (\psi^* + 1) - N_c(t) (h_0 - a') \psi^*; \\ D_2^* &= M_c(t) k_1^* - N_c(t) (h_0 - a') a' \psi^*; \\ D_3^* &= M_c(t) - N_c(t) (h_0 - a'); \quad M_c(t) = M_3(t) + N'_K (h_0 - a'); \\ N_c^* &= N(t) + N_K + N'_K; \quad k_1^* = h_0 + a' \psi^*; \quad k_2^* = h_0^2 + a'^2 \psi^*; \\ N_K &= \Delta_K E_a F_H; \quad N'_K = \Delta'_K E_a F'_H; \\ \psi^* &= \frac{F_H \psi_a^*}{F_H \psi_6^*}; \quad \alpha^* = \frac{F_H \psi_6^*}{b h_0 \psi_a^*} \frac{E_a}{\nu E(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Уравнение (457) совместно с (458) позволяет определить  $x^*$ , если известны  $\nu$ ,  $\psi_a^*$  и  $\psi_6^*$ . Однако в силу нелинейности интегрального уравнения (458) запись в аналитической форме даже приближенного решения приводит к весьма громоздким выражениям. Учитывая справедливость равенства (308), эту систему уравнений удобно решать в численном виде. Такой подход, в случае принятия в соответствии с (11) и (13),



$$F[\sigma_6^*(t)] = \beta_0 \sigma_6^*(t) + \beta \sigma_6^{*2}(t),$$

(460)

позволяет определять значения  $x^*$  в моменты времени  $\tau_1, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_n$  путем решения рекуррентного уравнения

$$d_7^*(t_n) x^{*7}(t_n) + d_6^*(t_n) x^{*6}(t_n) + d_5^*(t_n) x^{*5}(t_n) + d_4^*(t_n) x^{*4}(t_n) + d_3^*(t_n) x^{*3}(t_n) + d_2^*(t_n) x^{*2}(t_n) + d_1^*(t_n) x^*(t_n) + d_0^*(t_n) = 0. \quad (461)$$

Коэффициенты этого уравнения вычисляются по формулам

$$d_7^*(t_n) = 0, 25b^2 (\psi^* + 1) [D_1^* - (\psi^* + 1) (k_k^* + D_3^*)];$$

$$d_6^*(t_n) = 0, 25b^2 \{k_k^* (\psi^* + 1) [h_0 (\psi^* + 1) + 6k_1^*] + (\psi^* + 1) (6D_3^* k_1^* - D_2^*) - 3D_1^* k_1^* - 2D_1^* a' (\psi^* + 1)\};$$

$$d_5^*(t_n) = -k_k^* b^2 [1, 5h_0 k_1^* + 2, 25k_1^{*2} + k_2^* (\psi^* + 1)] - D_3^* b^2 \times \\ \times [2, 25k_1^{*2} + k_2^* (\psi^* + 1)] + 0, 5k_k^* b D_1^* (\psi^* + 1) + 0, 5b^2 \times \\ \times (1, 5D_2^* k_1^* + D_1^* k_2^*) + 0, 5a' b^2 [D_2^* (\psi^* + 1) + 3D_1^* k_1^*];$$

$$d_4^*(t_n) = k_k^* b^2 [2, 25h_0 k_1^* + h_0 k_2^* (\psi^* + 1) + 3k_1^* k_2^*] + \\ + 3D_3^* b^2 k_1^* k_2^* - 0, 5k_k^* b [(D_2^* + h_0 D_1^*) (\psi^* + 1) + 3D_1^* k_1^*] - \\ - 0, 5b^2 D_1^* k_2^* - a' b^2 (1, 5D_2^* k_1^* - D_1^* k_2^*);$$

$$d_3^*(t_n) = -k_c^* D_1^{*2} + 0, 5bk_k^* [h_0 D_2^* (\psi^* + 1) + 3k_1^* (h_0 D_1^* + \\ + D_2^*) + D_1^* k_2^*] - k_2^* b^2 [k_k^* (3h_0 k_1^* + k_2^*) + D_3^* k_2^* - a' D_2^*];$$

(462)

$$d_2^*(t_n) = k_c^* D_1^* (h_0 D_1^* + 2D_2^*) + k_c^* h_0 b^2 k_2^{*2} - k_k^* b [D_2^* (1, 5h_0 \times \\ \times k_1^* + k_2^*) + h_0 D_1^* k_2^*];$$

$$d_1^*(t_n) = -k_c^* D_2^* (2h_0 D_1^* + D_2^*) - k_k^* h_0 b D_2^* k_1^*;$$

$$d_0^*(t_n) = k_c^* h_0 D_2^{*2},$$

где

$$\begin{aligned}
 k_c^* &= \Phi^*(t_n) \beta C(t_n, \xi), \quad t_{n-1}^n; \quad k_\delta^*(t_n) = \Phi^*(t_n) \delta(t_n, \xi)_{t_{n-1}}^n; \\
 k_k^*(t_n) &= \Phi^*(t_n) \left[ \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\sigma_3(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \sigma_3(\tau_1) \left\{ \left[ \delta(t_n, \tau_1) - \right. \right. \right. \\
 & - \delta(t_n, \xi)_{\tau_1}^{t_1} \left. \left. \left. - \sigma_6(\tau_1) \beta [C(t_n, \tau_1) - C(t_n, \xi)_{\tau_1}^{t_1}] \right\} + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{i=n-1} \sigma_6^*(t_i) \left\{ \left[ \delta(t_n, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i} - \delta(t_n, \xi)_{t_i}^{t_{i+1}} \right] + \beta \sigma_6^*(t_i) \times \right. \\
 & \left. \left. \times \left[ C(t_n, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i} - C(t_n, \xi)_{t_i}^{t_{i+1}} \right] \right\} \right], \quad n > 2, \\
 \Phi^*(t_n) &= bh_0(h_0 - a') \nu E(t_n) \alpha(t_n); \\
 \delta(t_n, \tau) &= \frac{1}{E(\tau)} + \beta_0 C(t_n, \tau).
 \end{aligned} \tag{463}$$

При выполнении практических расчетов значения  $\delta(t_n, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i}$  и  $C(t_n, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i}$  могут определяться в соответствии с (144) по приближенным равенствам

$$\delta(t_n, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i} = \delta\left(t_n, \frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right); \quad C(t_n, \xi)_{t_{i-1}}^{t_i} = C\left(t_n, \frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right). \tag{464}$$

Решение соответствующих задач показало, что вследствие плавного изменения функций  $\delta(t, \tau)$  и  $C(t, \tau)$  применение формул (464) при отрезках времени  $t - \tau_1 = 0, 10, 30, 60, 120, 240, \infty$  может привести к погрешностям, не превышающим 3%.

Таким образом, расчет сводится к последовательному определению высоты сжатой зоны в различные моменты времени путем решения уравнения (461) и вычисления напряжений в бетоне и арматуре по формулам (457), (456), полагая  $t = t_n$ . Напряжения в бетоне  $\sigma_6(\tau_1)$  определяются по (457) при  $t = \tau_1$ , а высота сжатой зоны  $x(\tau_1)$  из уравнения

$$\begin{aligned}
 0,5N_c(\tau_1) x^3(\tau_1) + [M_c(\tau_1) - N_c h_0] x^2(\tau_1) + \alpha(\tau_1) h_0 \{M_c(\tau_1) [\psi(\tau_1) + \\
 + 1] - N_c(\tau_1) (h_0 - a') \psi(\tau_1)\} x(\tau_1) - \alpha(\tau_1) h_0 \{M_c(\tau_1) [h_0 - a' \psi(\tau_1)] - \\
 - N_c(\tau_1) (h_0 - a') a' \psi(\tau_1)\} = 0,
 \end{aligned} \tag{465}$$

где  $M_c(\tau_1)$ ,  $N_c(\tau_1)$ ,  $\alpha(\tau_1)$  и  $\psi(\tau_1)$  подсчитываются по (459) при  $t = \tau_1$ .

Средняя кривизна  $\kappa^*(t_n)$  и жесткость стержня  $B^*(t_n)$  разыскиваются в предположении  $\kappa_c^* = \kappa^*$  с помощью зависимостей

$$\kappa^*(t_n) = \frac{M_3(t_n) - [N(t_n) + N_R] z^*(t_n)}{B^*(t_n)}; \quad (466)$$

$$B^*(t_n) = \frac{E_a F_H}{\psi_a(t_n)} [h_0 - \kappa^*(t_n)] z^*(t_n),$$

где

$$z^*(t_n) = \frac{0,5 [\psi(t_n) + 1] \kappa^{*2}(t_n) - 1,5 k_1^* (t_n) \kappa^*(t_n) + k_2^* (t_n)}{[h_0 - \kappa^*(t_n)] - [0,5 \kappa^*(t_n) - a']} \left\{ \frac{N(t_n) + N_R}{M_3(t_n)} \psi(t_n) [\kappa^*(t_n) - a'] - \frac{N'_K}{M_3(t_n)} [h_0 - \kappa^*(t_n)] \right\}. \quad (467)$$

Изложенная методика может применяться в расчетах тавровых балок в тех случаях, когда нейтральная ось расположена в полке или в ребре на незначительном расстоянии от нижней грани. При этом в расчетных формулах следует принимать  $b = b'_n$  (см. рис. 53, з).

Приведенные формулы в частных случаях позволяют рассчитывать напряженное и деформированное состояние железобетонных стержней:

с двойной и одиночной преднапряженной арматурой при отсутствии внецентренного сжатия  $N(t) = 0^*$  или изгибающего момента  $M(t) = 0$ ;

с преднапряженной арматурой в растянутой зоне и обычной арматурой в сжатой зоне ( $\Delta'_K = 0, F'_H = F'_a$ );

с двойной ненапряженной арматурой ( $\Delta_K = \Delta'_K = 0, F_H = F_a, F'_H = F'_a$ );

с одиночной обычной арматурой ( $\Delta_K = \Delta'_K = 0, F'_H = 0, F_H = F_a$ ). В последнем случае, при отсутствии внецентренного сжатия [ $N(t) = 0$ ], уравнение (461) после последовательного сокращения на множитель  $h_0 - \kappa^*(t_n) \neq 0$  приводится к уравнению пятой степени [74]:

$$\begin{aligned} & -0,25 k_k^* x^{*5} + h_0 b^2 [1,25 k_k^* + 0,5 M(t_n)] x^{*4} + 0,5 b \{ k_k^* M(t_n) - \\ & - b h_0^2 [k_k^* + 2M(t_n)] \} x^{*3} + b h_0 [k_k^* b h_0^2 - 1,5 k_k^* M(t_n)] x^{*2} + \\ & + [k_k^* b h_0^2 M(t_n) - k_c^* M^2(t_n)] x^* + k_c^* M^2(t_n) = 0. \end{aligned} \quad (468)$$

\* Соответствующее решение при треугольной эпюре сжимающих напряжений приведено в [43].

При линейной зависимости между напряжениями и деформациями (эксплуатационный уровень нагрузки,  $\sigma_b \leq \leq 0,5R_{пр}$ ) можно воспользоваться приведенными расчетными формулами, принимая  $\beta_0 = 1$  и  $\beta = 0$ . В этом случае высота сжатой зоны  $x^*$  ( $t_n$ ) для стержня с двойной преднапряженной арматурой определяется из уравнения

$$0,5b [k_k^* (\psi^* + 1) - N_c(t_n) (h_0 - a')] x^{*3} - b [1,5k_k^* k_1^* - (h_0 - a') M_c(t_n) - N_c x(t_n) h_0] x^{*2} + (b k_k^* k_2^* - D_1^* k_0^*) x^* + k_0^* D_2^* = 0; \quad (469)$$

для балки с обычной одиночной арматурой при  $N(t) = 0$  — из уравнения [115]

$$0,5b k_k^* x^{*3} - b [0,5h_0 k_k^* + h_0 M(t_n)] x^{*2} + [bh_0 k_k^* - M(t_n) k_0^*] x^* + h_0 M(t_n) k_0^* = 0. \quad (470)$$

При кратковременном действии нагрузки уравнение (470) для балок с обычной одиночной арматурой легко приводится к известному уравнению [71]

$$x^2(\tau_1) - \alpha(\tau_1) h_0 x(\tau_1) + \alpha(\tau_1) h_0 = 0. \quad (471)$$

Для иллюстрации на рис. 54 показаны вычисленные согласно описанной методике и [75] эпюры сжимающих напряжений в бетоне железобетонной балки, работающей при действии высокой нагрузки с трещинами. При выполнении расчетов принимались:  $\psi_a(t)$  — по рекомендациям следующего параграфа;  $\psi_b(t) = 0,9$ ; мера ползучести бетона сжатой зоны, равной 155 меры ползучести при центральном сжатии.

Сопоставление опытных значений прогибов и деформаций с вычисленными по изложенной методике и по [43] приведены: для балок — в табл. 25 и 26; для стоек (опыты В. И. Шатохина) — в табл. 27 [44, 76, 126]. В табл. 28 применительно к результатам указанных экспериментов, а также опытов,

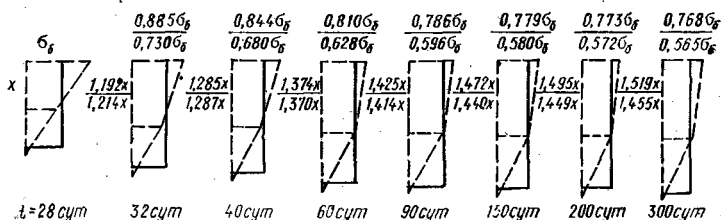


Рис. 54. Изменение эпюры сжимающих напряжений в поперечном сечении железобетонной балки с одиночной арматурой ( $\mu = 0,0148$ ,  $M/M_p = 0,93$ ) при длительном действии нагрузки. В числителе — трапециевидная; в знаменателе — прямоугольная эпюра

Таблица 25. Сравнение перемещений и полных относительных деформаций арматуры в сжатой и растянутой зонах бетона преднапряженных балок, вычисленных теоретически  $f^{\text{рас}}$  и  $\varepsilon^{\text{рас}}$ , с аналогичными величинами, определенными экспериментально  $f^{\text{оп}}$  и  $\varepsilon^{\text{оп}}$  ( $\tau_1=28$  сут,  $t=500$  сут) [44]

| Номера балок БНИ | Перемещение балок в середине пролета, мм |                              |                             |                            | Деформация растянутой арматуры $\varepsilon_+ \cdot 10^5$ |                            |                             |                            | Деформация арматуры в сжатой зоне $\varepsilon_- \cdot 10^5$ |  |   |                                       |
|------------------|--|------------------------------|-----------------------------|----------------------------|---|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|--|--|---|---------------------------------------|
|                  | $f_{\text{кр}}^{\text{оп}}$              | $f_{\text{кр}}^{\text{рас}}$ | $f_{\text{кр}}^{\text{оп}}$ | $f_{\text{д}}^{\text{оп}}$ | $f_{\text{д}}^{\text{рас}}$                               | $f_{\text{д}}^{\text{оп}}$ | $f_{\text{д}}^{\text{рас}}$ | $f_{\text{д}}^{\text{оп}}$ | $f_{\text{д}}^{\text{рас}}$                                  | $\varepsilon_{\text{кр}-}^{\text{оп}}$ | $\varepsilon_{\text{кр}-}^{\text{рас}}$ | $\varepsilon_{\text{д}-}^{\text{оп}}$ |
| 27               | 2,61                                     | 0,91                         | 4,51                        | 1                          | 423   | 1,01                       | 451                         | 1,01                       | 423  | 1,01                                   | 386                                     | 1,01                                  |
| 28               | 2,37                                     | 0,96                         | 4,2                         | 1                          | 425   | 0,99                       | 456                         | 0,97                       | 410  | 0,9                                    | 382                                     | 0,82                                  |
| 29               | 2,43                                     | 1                            | 4,74                        | 0,97                       | 455   | 0,93                       | 511                         | 0,88                       | 386  | 0,92                                   | 345                                     | 0,86                                  |
| 33               | 3,43                                     | 1,06                         | 5,93                        | 1,03                       | 551   | 0,99                       | 635                         | 0,92                       | 353  | 0,92                                   | 337                                     | 0,91                                  |
| 34               | 3,64                                     | 0,96                         | 5,67                        | 1,03                       | 533   | 1,01                       | 596                         | 0,97                       | 315  | 1,02                                   | 289                                     | 0,99                                  |
| 35               | 3,34                                     | 0,75                         | 5,34                        | 0,84                       | 434   | 0,97                       | 581                         | 0,94                       | 346  | 0,99                                   | 323                                     | 0,95                                  |

Примечание. Индексы «кр» и «д» соответствуют моментам времени  $\tau_1=28$  сут и  $t=500$  сут;  $M(\tau_1)/M_p=0,49-0,66$ .

Таблица 26. Сравнение прогибов и относительных деформаций бетона сжатой зоны железобетонных балок, вычисленных теоретически  $f^{\text{рас}}$  и  $\varepsilon^{\text{рас}}$ , со средними прогибами и деформациями, определенными экспериментально  $f^{\text{оп}}$  и  $\varepsilon^{\text{оп}}$  ( $\tau_1=28$  сут,  $t=500$  сут) [76]

| Номера балок | $\frac{M(\tau_1)}{M_p}$ | $f_{\text{кр}}^{\text{оп}}$ , мм | $f_{\text{кр}}^{\text{рас}}$<br>$f_{\text{кр}}^{\text{оп}}$ | $f_{\text{д}}^{\text{оп}}$ , мм | $f_{\text{д}}^{\text{рас}}$<br>$f_{\text{д}}^{\text{оп}}$ | $\varepsilon_{\text{кр}-}^{\text{оп}} \cdot 10^5$ | $\varepsilon_{\text{кр}-}^{\text{рас}}$<br>$\varepsilon_{\text{кр}-}^{\text{оп}}$ | $\varepsilon_{\text{д}-}^{\text{оп}} \cdot 10^5$ | $\varepsilon_{\text{д}-}^{\text{рас}}$<br>$\varepsilon_{\text{д}-}^{\text{оп}}$ |
|--------------|-------------------------|----------------------------------|---|---------------------------------|---|---|---|--|---|
| Б-I-2; 4*    | 0,93                    | 13,92                            | 0,94  | 22,93                           | 1,08  | 129   | 1,07  | 346  | 1   |
| Б-I-10; 12   | 0,79                    | 10,9                             | 1   | 21,86                           | 1,07  | 108   | 1,03  | 332  | 1,01  |
| Б-I-18; 20   | 0,66                    | 10,81                            | 0,99  | 22,15                           | 1,1   | 103   | 1,09  | 326  | 1,01  |
| Б-I-26; 28   | 0,55                    | 7,88                             | 1,01  | 17                              | 1,03  | 95  | 0,99  | 256  | 1,01  |
| Б-II-6; 8*   | 0,95                    | 13,65                            | 0,98  | 20,92                           | 1,03  | 106   | 1,05  | 236  | 1,01  |
| Б-II-14; 16  | 0,8                     | 12,21                            | 0,99  | 21,5                            | 1,07  | 91  | 1,02  | 258  | 1,02  |
| Б-II-22; 24  | 0,63                    | 8,26                             | 1,05  | 15,12                           | 1,02  | 71  | 1,02  | 175  | 1,02  |
| Б-II-30; 32  | 0,5                     | 6,6                              | 1,02  | 10,77                           | 1,08  | 59  | 0,99  | 138  | 1,02  |

\* Для балок № 2, 4, 6 и 8  $t=60$  сут.

Таблица 27. Сравнение прогибов коротких внецентренно сжатых железобетонных стоек, вычисленных теоретически  $f^{рас}$ , с прогибами  $f^{оп}$ , определенными экспериментально ( $\tau_1 = 28$  сут,  $t = 215$  сут) [126]

| Номера стоек | $F_a$ , см | $F_a$ , см | $M(\tau_1)$ , кН·м | $f_{кр}^{оп}$ , мм | $f_{кр}$ |      | $f_D^{оп}$ , мм | $f_D$ |    |
|--------------|------------|------------|--------------------|--------------------|----------|------|-----------------|-------|----|
|              |            |            |                    |                    | рас      | оп   |                 | рас   | оп |
| СП-1,2,3     | 1,13       | 1,13       | 4,96               | 2,18               | 1,03     | 3,70 | 1,05            |       |    |
| СП-4,5       | 1,13       | 1,13       | 6,25               | 2,36               | 0,99     | 4,31 | 1,03            |       |    |
| СП-6,7       | 0,5        | 0,503      | 2,02               | 1,57               | 1,03     | 2,97 | 1,05            |       |    |
| СП-8,9,10    | 0,5        | 0,503      | 3,37               | 2,06               | 1,02     | 3,28 | 1,03            |       |    |

Примечание.  $M(\tau_1)$  — изгибающие моменты относительно центра тяжести растянутой арматуры стойки.

проведенных в других организациях, показаны усредненные данные сопоставления прогибов [85, 96, 46].

Как следует из таблиц, описанный метод расчета железобетонных стержней, работающих с трещинами в растянутой зоне при длительном действии нагрузки, достаточно полно характеризует влияние ползучести и старения на развитие деформированного состояния. Это, а также соответствующие

Таблица 28. Соответствие результатов расчетов, выполненных по изложенному способу и полученных опытным путем

| Авторы опытов                                       | Число балок | $f_{кр}^{рас} / f_{кр}^{оп}$ |                          | $f_D^{рас} / f_D^{оп}$ |                          |
|---|-------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|
|   |             | средние отклонения           | средне-кв. отклонения, % | средние отклонения     | средне-кв. отклонения, % |
| И. И. Темнов  | 19          | 0,999                        | 2,96                     | 0,989                  | 1,37                     |
| И. И. Улицкий,<br>И. А. Русинов,<br>С. Е. Фрайфельд | 13*         | 0,995                        | 5,6                      | 0,98                   | 5,11                     |
| В. И. Шатохин                                       | 12          | 0,983                        | 3,8                      | 0,962                  | 8,26                     |
|   | 12**        | 0,983                        | 3,6                      | 0,964                  | 6,35                     |
| В. М. Оплачко                                       | 16          | 0,978                        | 3,43                     | 1,062                  | 2,35                     |
| В. А. Зедгендзе                                     | 12          | 0,985                        | 7,3                      | 1,04                   | 12,4                     |
| В. И. Половец                                       | 6           | 0,991                        | —                        | 1,064                  | —                        |

\* Обработка выполнена И. И. Темновым (см. табл. 38 [85]).

\*\* Внецентренно-сжатые стойки с двойным армированием.

сравнения подтверждают правильность принятых способов учета основных явлений, влияющих на развитие прогибов во времени, а именно: ползучести и старения бетона сжатой и растянутой зон, уменьшение напряжений в сжатом и растянутом (между трещинами) бетоне, увеличение напряжений в арматуре.

### 3. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $\psi_a(t)$

Наблюдения над железобетонными балками в процессе кратковременного и длительного действия постоянной нагрузки показали, что трещины в основном образуются в процессе приложения нагрузки. В дальнейшем трещинообразование охватывает дополнительные участки балки по длине. Число новых трещин, появляющихся между трещинами, образовавшимися в процессе загрузки, невелико даже при относительно высоких нагрузках (табл. 29). Поэтому при построении методики расчета  $\psi_a$  для случая действия изгибающих моментов, постоянных во времени, можно считать, что изменение  $\psi_a(t)$  происходит в результате ползучести бетона растянутой зоны и перераспределения во времени внутренних усилий между бетоном и арматурой.

В балках с обычной арматурой растягивающие напряжения в бетоне начинают формироваться сразу же после приложения первой ступени нагрузки; в балках с преднапряженной арматурой формирование растягивающих напряжений происходит после погашения предварительного обжатия арматуры. В этом случае логично определять для преднапряженных балок  $\psi_a(t)$  как отношение средних деформаций в арматуре после погашения обжатия и аналогичных деформаций в сечении с трещиной [105]

$$\psi_a(t) = \frac{\sigma_n^{c*}(t) - \sigma_K}{\sigma_n^*(t) - \sigma_K}, \quad (472)$$

где  $\sigma_K = \Delta_K E_a$  — напряжение в арматуре, соответствующее вынужденным деформациям  $\Delta_K$ .

Учитывая это и считая, что полнота эпюры напряжений в растянутой зоне бетона вдоль арматуры  $\omega$ , равная отношению эпюры к площади описанного прямоугольника, постоянна во времени, можно представить  $\psi_a(t)$  в виде

$$\psi_a(t) = \frac{[\sigma_n^*(t) - \sigma_K] l_T - \omega \sigma_{n2}^*(t) l_T}{[\sigma_n^*(t) - \sigma_K] l_T}, \quad (473)$$

Т а б л и ц а 29. Число трещин в растянутой зоне бетона

| Авторы опы-<br>тов | Шифр балок | μ, %  | $\frac{M(\tau_1)}{M_p(\tau_1)}$ | Число трещин в балке<br>в момент времени |                           |                                 |                         |
|--------------------|------------|-------|---------------------------------|--|---------------------------|---------------------------------|-------------------------|
|                    |            |       |                                 | $\tau_1$                                 | $t - \tau_1 = 6$<br>7 сут | $t - \tau_1 \approx$<br>300 сут | в том чис-<br>ле новых* |
| И. И. Темнов       | Б-13; 15   | 0,561 | 0,5                             | 14                                       | 19                        | 19                              | 1                       |
|                    | Б-17; 19   | 0,819 |                                 | 12                                       | 16                        | 16                              | 0                       |
|                    | Б-21; 22   | 1,48  |                                 | 10                                       | 15                        | 15                              | 0                       |
|                    | Б-23; 25   | 2,34  |                                 | 16                                       | 18                        | 18                              | 0                       |
| В. М. Оплач-<br>ко | БИ-30      | 1,48  | 0,5                             | 12                                       | 16                        | 16                              | 0                       |
|                    | БН-22; 24  | 1,48  | 0,63                            | 14                                       | 17                        | 18                              | 0                       |
|                    | БН-14; 16  | 1,48  | 0,8                             | 15                                       | 18                        | 19                              | 1                       |
|                    | БН-26;     | 2,8   | 0,55                            | 13                                       | 17                        | 18                              | 0                       |
|                    | БН-18; 20  | 2,8   | 0,66                            | 16                                       | 19                        | 21                              | 0                       |
|                    | БН-10; 12  | 2,8   | 0,79                            | 17                                       | 23                        | 24                              | 3                       |
| В. И. Поло-<br>вец | Б-2.6; 12  | 3,88  | 0,9                             | 28                                       | 34                        | 39                              | 0                       |
|                    | Б-2.1      |       |                                 | 25                                       | 31                        | 38                              | 1                       |
|                    | Б-2.7      |       |                                 | 30                                       | 37                        | 43                              | 2                       |
|                    | Б-2.2      |       |                                 | 26                                       | 31                        | 39                              | 4                       |
|                    | Б-2.14     |       |                                 | 33                                       | 39                        | 47                              | 5                       |

\* Имеются в виду трещины, образовавшиеся между трещинами, возникшими в процессе кратковременного действия нагрузки.

где  $\sigma_{н2}^*(t)$  — напряжение, передающееся в момент времени  $t$  на растянутый бетон. Эти напряжения, согласно данным В. И. Мурашева, определяются из условий равновесия части балки, заключенной между сечением с трещиной и с сечением, расположенным между трещинами. Если допустить, что в течение всего рассматриваемого периода времени плечи внутренних пар в различных сечениях балки равны, то условие равенства моментов внутренних сил в сечениях с трещинами и посередине между ними можно заменить условием равенства сил, действующих в растянутой зоне,

$$n_p' R_p F_H + F(\xi_T) R_p + \Delta\sigma_H^*(t) F_H = \sigma_{H1}^*(t) F_H + F[\xi^*(t)] \chi^*(t) R_p, \quad (474)$$

где  $\Delta\sigma_H^*(t)$  — приращение напряжения в арматуре после появления трещин;  $\sigma_{H1}^*(t)$  — приращение напряжений в арматуре в сечении между трещинами, соответствующее рас-



тяжению бетона у арматуры:

$$\left. \begin{aligned} \chi^*(t) &= \frac{\sigma_p^*}{R_p} = \frac{\sigma_b(\tau_1) H_b(t, \tau_1)}{R_p} = \chi(\tau_1) H_b(t, \tau_1); \\ \chi(\tau_1) &= \frac{\sigma_{нт} - \sigma_k}{\sigma_n(\tau_1) - \sigma_k}; \quad n'_p = \frac{E_a}{0,5E(\tau_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (475)$$

причем  $\sigma_{нт}$  — напряжения в арматуре в сечении с трещиной сразу же после появления трещин;  $H_b(t, \tau_1)$  — коэффициент затухания напряжений в растянутой зоне бетона в сечении между трещинами. При определении  $H_b(t, \tau_1)$ , в силу линейной зависимости между напряжениями и деформациями бетона при растяжении почти до предела прочности, применяется линейная теория.

Второе слагаемое в левой части уравнения (474) учитывает усилие в растянутой зоне бетона до появления трещин. Применительно к балке, имеющей поперечное сечение растянутой зоны в виде тавра (см. рис. 53, з),

$$F(\xi_T) = (1 - \xi_T) bh_0 + (b_n - b) h_T, \quad (476)$$

где  $\xi_T$  — относительная высота сжатой зоны бетона непосредственно перед появлением трещины: если растянутая зона поперечного сечения прямоугольна (рис. 53, а), то второе слагаемое в формуле (476) равно нулю.

Вычисление  $F[\xi^*(t)]$  — площади растянутой зоны в сечении между трещинами, может выполняться по формуле (476) с предварительной заменой  $\xi_T$  на  $\xi^*(t)$ .

Определяя из (474)  $\sigma_{н1}^*(t)$  и учитывая, что

$$\sigma_{н2}^*(t) = [\sigma_n^*(t) - \sigma_k] - \sigma_{н1}^*(t); \quad \sigma_n^*(t) = \sigma_{нт} + \Delta\sigma_n^*(t), \quad (477)$$

после несложных преобразований приходим к формуле

$$\psi_a(t) = 1 - \omega \left\{ \frac{\sigma_{нт} - \sigma_k}{\sigma_n^* - \sigma_k} - \frac{n'_p R_p}{\sigma_n^* - \sigma_k} \left[ 1 + \frac{F(\xi_T) - F[\xi^*(t)] \chi(\tau_1) H_b(t, \tau_1)}{n'_p F_n} \right] \right\}. \quad (478)$$

В этой формуле произведение  $F[\xi^*(t)] \chi(\tau_1) H_b(t, \tau_1)$  определяет усилие в сечении между трещинами, воспринимаемое растянутым бетоном. При этом эпюра напряжений в бетоне считается прямоугольной. Можно приближенно принять, что изменение во времени напряженного состояния растянутого бетона в сечении между трещинами аналогично изменению соответствующего напряженного состояния в

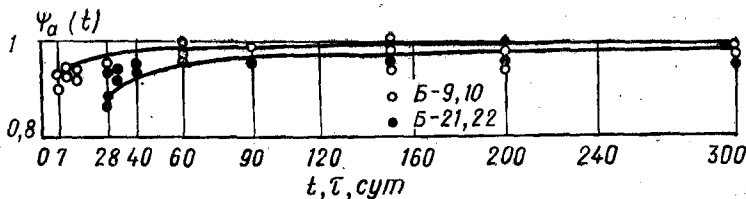


Рис. 55. Кривые изменения во времени  $\psi_a(t)$

балках, работающих без трещин. При этом, как показал анализ, выполненный для балок с обычной арматурой [85], использование  $F[\xi^*(t)]$  и  $H_\sigma(t, \tau_1)$ , вычисленных при треугольной эпюре растягивающих напряжений, существенных погрешностей не вызывает. Для преднапряженных балок  $\xi^*(t)$  и  $H_\sigma(t, \tau_1)$ , для стержня без трещин в общем случае определяются по формулам:

$$\xi^*(t) = 1 - \left\{ 1 - \frac{\sigma_\sigma^*(h_1, t)}{\sigma_\sigma^*[-(h_0 - h_1), t]} \right\}; \quad H_\sigma(t, \tau_1) = \frac{\sigma_\sigma^*(h_1, t)}{\sigma_\sigma(h_1, \tau_1)}. \quad (479)$$

В формулах (479)  $\sigma_\sigma^*(h_1, t)$  и  $\sigma_\sigma^*[-(h_0 - h_1), t]$  являются суммарными напряжениями и вычисляются в зависимости от армирования и напряженного состояния по формулам (353), (357), (373), (376). Для ненапряженных элементов с несимметричным армированием  $F_a > F'_a$  значение  $\xi^*(t)$  может определяться без учета влияния  $F'_a$  [см. (375)]. Значения  $\xi_T$  и  $M_T$  могут быть найдены по известным формулам [72].

Напряжения  $\sigma_{HT}$  могут вычисляться по первой формуле (456) с заменой  $M_a(t)$  на  $M_T$  и  $x^*$  на  $x_T$ , принимая при этом в расчетных формулах  $\psi_a = 1$ ,  $\psi_\sigma = 1$ ,  $\nu = 0,45$ .

Таким образом, определение всех входящих в формулу (478) величин, кроме  $\sigma_n^*(t)$ , ясно из изложенного. Напряжение в сечении с трещиной  $\sigma_n^*(t)$  в первом приближении может быть определено по методу, изложенному выше, считая для сечения с трещиной  $\psi_a(t) = 1$ ;  $\omega$  принимается равным  $2/3$ .

Для балок с обычной арматурой функция  $\psi_a(t)$  может быть определена по формуле (478), если во всех расчетных формулах принимать  $\Delta_K = \Delta'_K = 0$  и  $F_n = F_a$ ,  $F'_n = F'_a$ . Сопоставление расчетных и опытных значений  $\psi_a(t)$  для балок с обычной одиночной арматурой [96] приведено на рис. 55.

#### 4. О ПРАКТИЧЕСКИХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

**Основные расчетные зависимости.** Для построения приближенного способа расчета удобно принять зависимость

$$\sigma_0^*(t) = \frac{\sigma_0^*(t)}{\nu(t) E(t)}, \quad (480)$$

где функция  $\nu(t)$  учитывает особенности длительного деформирования бетона сжатой зоны, и считать справедливыми гипотезы и предпосылки, сформулированные в п. 1 этой главы. В этом случае высоту сжатой зоны в сечении с трещиной в любой момент времени  $t$  —  $x^*(t)$  можно разыскивать с помощью уравнения (465) с предварительной заменой  $\tau_1$  на  $t$  и  $\nu$  на  $\nu(t)$ .

Средняя кривизна балки определяется по формуле

$$x^*(t) = \frac{M_c}{h_0 z^*(t)} \left\{ \frac{\psi_a(t)}{E_a F_H} + \frac{\psi_0(t)}{[\gamma^*(t) + \xi^*(t)] b h_0 \nu(t) E(t)} \right\} - \frac{N_c \psi_a(t)}{h_0 E_a F_H}, \quad (481)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z^*(t) &= \frac{\alpha^*(t) \psi^*(t) h_0 [x^*(t) - a'] (h_0 - a') + x^*(t) [h_0 - 0,5x^*(t)]}{x^{*2}(t) + \alpha^*(t) \psi^*(t) [x^*(t) - a']} ; \\ \gamma^*(t) &= \frac{E_a F_H'}{\nu(t) E(t)} \frac{x^*(t) - a'}{b h_0 x^*(t)} ; \xi^*(t) = x^*(t)/h_0. \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

Для получения кривизны при кратковременном действии нагрузки необходимо в формулах для  $\alpha$ ,  $\psi$ ,  $\nu$  принять  $t = \tau_1$ .

Формула (481) внешне совпадает с формулой (158) СНиП II-21-75. Однако при разыскании  $\nu(t)$  и  $\psi_a(t)$ , с учетом всех основных особенностей процесса и определения  $x^*(t)$  путем решения уравнения (465), формула (481) позволяет вычислить изменение кривизны с учетом потерь усилий преднапряжения от ползучести конкретного бетона.

**Определение  $\nu(t)$ .** Если известен закон изменения  $\sigma_0^*(t)$  во времени, то всегда можно подобрать для промежуток

$t - \tau_1$  значение  $\sigma_0^*(\xi)$ , среднее в смысле удовлетворения равенства

$$\int_{\tau_1}^t \sigma_0^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \int_{\tau_1}^t F[\sigma_0^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = \\ = \sigma_0^*(\xi) \frac{1}{E(\tau)} \Big|_{\tau_1}^t + \sigma_0^*(\xi) [\beta_0 + \beta \sigma_0^*(\xi)] C(t, \tau) \Big|_{\tau_1}^t. \quad (483)$$

Учитывая это, выражение (448) можно записать в виде

$$\varepsilon_0^*(t) = \frac{\sigma_0^*}{E(t)} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\sigma_0(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \sigma_0^*(\xi) \frac{1}{E(\tau)} \Big|_{\tau_1}^t - \\ - \sigma_0^*(\xi) [\beta_0 + \beta \sigma_0^*(\xi)] C(t, \tau) \Big|_{\tau_1}^t. \quad (484)$$

Приравняв правые части последнего равенства и (480), получим формулу для определения коэффициента  $\nu(t)$

$$\nu(t) = \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{E(t)}{E(\tau_1)} \frac{\sigma_0(\tau_1)}{\sigma_0^*(t)} + \frac{\sigma_0^*(\xi)}{\sigma_0^*(t)} \left\{ \frac{E(t)}{E(\tau_1)} - \right.} ; \quad (485)$$

$$\left. - 1 + E(t) [\beta_0 + \beta \sigma_0^*(\xi)] C(t, \tau_1) \right\}$$

при  $\beta_0 = 1$  и  $\beta = 0$  зависимость (485) обращается в формулу линейной теории [85, 117].

Приближенное представление интегралов как сумм и применение теоремы о среднем позволяют выделить из (483) квадратное уравнение [77] для разыскания среднего напряжения  $\sigma_0^*(\xi)$

$$d_2(t_n) \sigma_0^{*2}(\xi) + d_1(t_n) \sigma_0^*(\xi) + d_0(t_n) = 0, \quad (486)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_2(t_n) &= \beta C(t_n, \tau_1); \quad d_1(t_n) = -[E(t_n)]^{-1} + \delta(t_n, \tau_1); \quad d_0(t_n) = \\ &= [E(t_n)]^{-1} \sigma_0^*(t_n) - \delta(t_n, \tau_1) \sigma_0(\tau_1) - \beta C(t_n, \tau_1) \sigma_0^2(\tau_1) - \\ &- \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \delta(t_n, \xi)_{i-1}^t [\sigma_0^*(t_i) - \sigma_0^*(t_{i-1})] - \beta C(t_n, \xi)_{i-1}^t \times \right. \\ &\left. \times [\sigma_0^{*2}(t_i) - \sigma_0^{*2}(t_{i-1})]; \quad \delta(t_n, \tau_1) = [E(\tau)]^{-1} + \beta_0 C(t_n, \tau) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (487)$$

При  $\beta_0 = 1$  и  $\beta = 0$  из уравнения (486) следует формула для определения средних напряжений по линейной теории [85]

$$\sigma_6^*(\xi) = \frac{\sigma_6^*(t_n) [E(t_n)]^{-1} - \sigma_6(\tau_1) \delta(t_n, \tau_1) - \sum_{i=1}^{i=n} \delta(t_n, \xi) \sigma_{i-1}^* \times \times [\sigma_6^*(t_i) - \sigma_6^*(t_{i-1})]}{[E(t_n)]^{-1} - \delta(t, \tau_1)} \quad (488)$$

На рис. 56 показаны деформации бетона сжатой зоны одной из балок с одиночной арматурой, испытанных в опытах [96]; теоретические кривые построены по формулам (480), (485) и (488) с предварительным определением  $\sigma_6^*(t)$  по (457) ( $\beta_0 = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Delta_K = \Delta'_K = 0$ ,  $F'_H = 0$ ,  $N = 0$ ,  $F_H = F_a$ ).

Вычисления  $\sigma_6^*(\xi)$  и  $\sigma_6^*(\infty)$ , выполненные по (486), (488) и (457) при  $t = \infty$ , позволили установить, что отношения напряжений  $\sigma_6(\tau_1)/\sigma_6^*(\infty)$  и  $\sigma_6^*(\xi)/\sigma_6^*(\infty)$  при постоянных нагрузках для балок с обычной арматурой могут быть приближенно выражены в виде функций  $\bar{\alpha}^*$  (рис. 57)

$$\bar{\alpha}^* = \frac{F_a}{bh_0} \frac{E_a}{E(\infty)} \left\{ \frac{1}{\nu} + \varphi(\infty, \tau_1) [\beta_0 + \beta \sigma_6^*(\xi)] \right\} \quad (489)$$

при эксплуатационных уровнях нагрузки [117]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_6(\tau_1)}{\sigma_6^*(\infty)} &= 1 + \frac{0,47}{1,1 + \bar{\alpha}^*} + (1,13 - 0,25) \frac{F'_a}{bh_0} ; \\ \frac{\sigma_6^*(\xi)}{\sigma_6^*(\infty)} &= 1 + \frac{0,16}{1,5 + \bar{\alpha}^*} + 0,25 \frac{F'_a}{bh_0} ; \end{aligned} \right\} \quad (490)$$

при высоких уровнях нагрузки (балки с одиночной арматурой) [77]

$$\frac{\sigma_6(\tau_1)}{\sigma_6^*(\infty)} = 1 + \frac{1,2}{1,87 + \bar{\alpha}^*} ; \quad \frac{\sigma_6^*(\xi)}{\sigma_6^*(\infty)} = 1 + \frac{0,154}{1,19 + \bar{\alpha}^*} \quad (491)$$

Зависимости (489), (490) справедливы при  $\bar{\alpha}^* > 0,12$  и  $\tau_1 \geq 28$  сут, причем для случая эксплуатационных нагрузок в (489) следует принимать  $\beta_0 = 1$  и  $\beta = 0$ .

При высоких нагрузках для подсчета значений  $\sigma_6^*(\xi)$ , необходимых для определения  $\bar{\alpha}^*$  по (489), может быть использован способ последовательных приближений [77]. На первом шаге  $\bar{\alpha}^*$  вычисляются при  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta = 0$ , отношения напряжений по (490); на втором — с помощью полученных

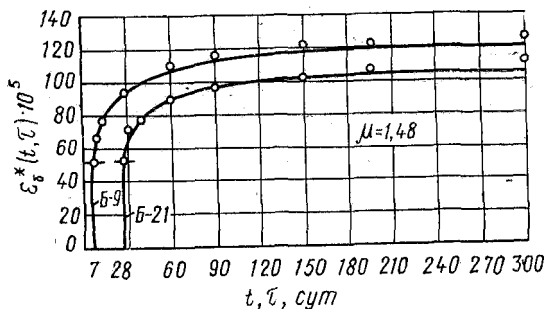
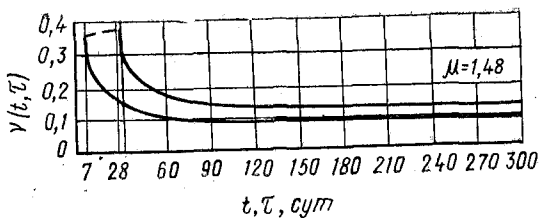


Рис. 56. Кривые изменения во времени  $\nu(t, \tau)$  (верхний график) и теоретические кривые деформаций сжатой зоны железобетонных балок ( $M/M_p=0,5$ )

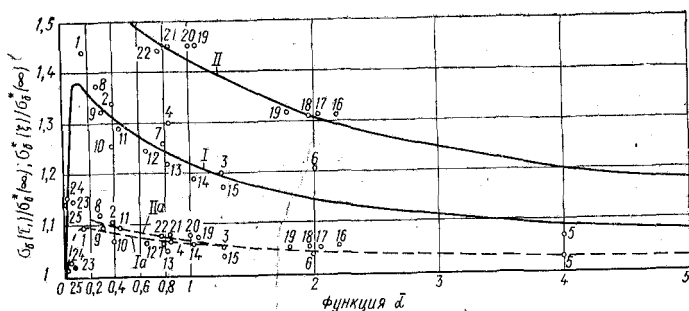


Рис. 57. Отношения напряжений в сжатой зоне бетона:  $\sigma_s(\tau)/\sigma_s^*(\infty)$  — и  $\sigma_s^*(\xi)/\sigma_s^*(\infty)$  —

*I, Ia* — при эксплуатационном уровне нагрузки; *II, IIa* — при высоком уровне нагрузки ( $\tau_1=28$  сут); *1, 2* — опыты И. И. Улицкого; *3-6* — опыты И. И. Улицкого и И. А. Русинова; *7* — С. Е. Фрайфельда; *8-15* — И. И. Темнова; *16-22* — В. М. Оплачко; *23-25* — В. А. Зедгенидзе

Таблица 30. Значения  $\xi_T$  и функция  $\bar{\xi}(\tau_1)$

| $\alpha_1=2 \mu n$ | $\xi_T$ | $\bar{\xi}(\tau_1)$ | $\alpha_1=2 \mu n$ | $\xi_T$ | $\bar{\xi}(\tau_1)$ |
|--------------------|---------|---------------------|--------------------|---------|---------------------|
| —                  | 1       | 1                   | 0,214              | 0,548   | 3,112               |
| 2                  | 0,75    | 1,125               | 0,124              | 0,529   | 4,796               |
| 0,75               | 0,636   | 1,485               | 0,05               | 0,512   | 10,67               |
| 0,5                | 0,6     | 1,8                 | 0,026              | 0,506   | 19                  |
| 0,334              | 0,572   | 2,281               | 0                  | 0,5     | —                   |

значений отношения напряжений  $\sigma_6(\tau_1)/\sigma_6^*(\infty)$  и  $\sigma_6^*(\xi)/\sigma_6^*(\infty)$  и значения  $\sigma_6(\tau_1)$ , найденного по (457), вычисляется  $\sigma_6^*(\xi)$ . Присчеты показали, что на втором шаге  $\sigma_6^*(\xi)$  определяется с погрешностью порядка 2%.

О величинах функции  $\psi_a(t)$ . При постоянных нагрузках для балок с обычной арматурой формулу (478) для момента времени  $t = \infty$  И. И. Темнов предложил представить в виде

$$\psi_a(\infty) = 1 - \frac{\omega}{\sigma_a(\tau_1)} \frac{\sigma_a(\tau_1)}{\sigma_a^*(\infty)} \{ \sigma_{ат} - n' R_p [\bar{\xi}(\tau_1) - \chi(\tau_1) \Phi(\infty; \tau_1)] \}. \quad (492)$$

Значения функций  $\bar{\xi}(\tau_1)$  и  $\Phi(\infty, \tau_1)$ , входящих в (492), приведены в табл. 30 и 31, причем:  $\mu = F_a/bh_0$ ,  $n = E_a/E_6(\tau_1)$ ;  $\rho_1$  определяется по формуле (395). Для случая, когда  $t = \tau_1$ ,  $\Phi(\tau_1, \tau_1) = [1 - \xi_c(\tau_1)]/\alpha_1$ , где  $\xi_c(\tau_1)$  разыскивается по первой формуле (479),  $\alpha_1 = 2\mu n$ ; для балок с одиночной арматурой  $\xi_c(\tau_1) = 1 + (1 - \xi_T)/\alpha_1$  значения  $\xi_T$  приведены в табл. 30. Отношение напряжений

Таблица 31. Значения функций  $\Phi(\infty, \tau_1)$  ( $\tau_1=28$ ,  $t=\infty$ ) (увеличены в  $10^3$  раза)

| $\mu, \rho_1 n$     | Предельные характеристики ползучести бетона $\Phi(\infty, \tau_1)$ |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     | 1  | 1,5   | 2     | 2,5   | 3     | 3,5   | 4     |
| 1 + $\mu, \rho_1 n$ |  |       |       |       |       |       |       |
| 1                   | 0  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0,8                 | 39   | 23    | 15    | 15    | 17    | 7     | 4     |
| 0,6                 | 213  | 147   | 104   | 76    | 56    | 43    | 33    |
| 0,4                 | 760  | 596   | 470   | 374   | 302   | 246   | 204   |
| 0,2                 | 2952   | 2604  | 2315  | 2056  | 1831  | 1637  | 1468  |
| 0,08                | 10045  | 9545  | 9114  | 8659  | 8273  | 7841  | 7500  |
| 0,06                | 14281  | 13719 | 13219 | 12781 | 12383 | 11875 | 11438 |

$\sigma_a(\tau_1)/\sigma_a^*(\infty)$  при  $\bar{\alpha}^* > 0,2$  может быть приближенно определено по формуле

$$\sigma_a(\tau_1)/\sigma_a^*(\infty) = 0,904 - 0,116\bar{\alpha}^*, \quad (493)$$

полученной в результате обработки исследований большого числа данных по балкам [117].

**Приближенный способ определения жесткостей железобетонных балок.** В последнее время В. А. Завалиным и М. В. Штейнбергом под руководством И. Е. Прокоповича и при участии Е. Н. Щербакова решение, изложенное в п.2 этой главы, развито на случай расположения нейтральной оси и в ребрах тавровых и двутавровых железобетонных балок с обычной арматурой. Анализ результатов многочисленных расчетов, выполненных по специальной программе применительно к изгибу балок; транспортных сооружений [ $M(t) = M = \text{const}$ ], показал, что если формулу (466) представить в виде [100] ( $t_n = \infty$ )

$$B^*(\infty) = F_6 E_6 h_0^2 \sqrt{\mu n} K^*(\infty), \quad (494)$$

где

$$K^*(\infty) = \frac{\eta^*(\infty)}{\psi_a(\infty)} [1 - \xi^*(\infty)] \sqrt{\mu n};$$

$$\eta^*(\infty) = z^*(\infty)/h_0; \quad \xi^*(\infty) = x^*(\infty)/h_0, \quad (495)$$

то коэффициент  $K^*(\infty)$  приближенно, с погрешностью, не превышающей допустимой для инженерных расчетов, может быть найден на основании таких правил:

а) во всех случаях, кроме оговоренных в п. «б» — с помощью зависимости

$$K^*(\infty) = \frac{K}{1 + \varphi(\infty)(\beta_1 + \beta_2 \zeta^2)}; \quad \zeta = \frac{M_{6T}}{M}, \quad (496)$$

где коэффициент  $K$  относится к случаю кратковременного действия нагрузки [ $\varphi(\infty) = 0$ ] и тоже связан с уровнем загрузки

$$K = b_1 + b_2 \zeta^2; \quad (497)$$

б) при  $0 \leq \varphi(\infty) \leq 1$  значение  $B^*(\infty)$ , найденное согласно п. «а», снижается на 10%, если  $\mu n < 0,08$ ; снижается на 7%, если  $\mu n \geq 0,18$  и  $\zeta \geq 0,6$ ; это относится и к жесткости при кратковременном действии нагрузки  $B$ ; при  $1 < \varphi(\infty) < 3$  значение  $B^*(\infty)$  повышается на 7%, если  $\mu n \geq 0,18$  и  $\zeta < 0,1$ .



Таблица 32. Коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , входящие в формулу (496)

| $\beta_i$ | $\alpha$ |       |       |   |
|-----------|----------|-------|-------|---|
|           | 1        | 2—4   | 5—6   | 7—8   |
| $\beta_1$ | 0,278    | 0,226 | 0,258 | 0,276—0,025 ( $\alpha-5$ ) (10 $\gamma-1$ ) |
| $\beta_2$ | 0,178    | 0,187 | 0,197 | 0,211—0,025 ( $\alpha-6$ ) (10 $\gamma-1$ ) |

Таблица 33. Коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$ , входящие в формулу (497)

| $b_i$ | $\alpha$ |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 1        | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     |
| $b_1$ | 0,159    | 0,176 | 0,19  | 0,205 | 0,213 | 0,22  | 0,223 | 0,223 |
| $b_2$ | 0,074    | 0,08  | 0,086 | 0,088 | 0,094 | 0,097 | 0,099 | 0,1   |

Значения  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  зависят от параметров поперечного сечения балки  $\alpha = b'_p/b$  и  $\gamma = h'_p/h$  (рис. 53, з) и принимаются по табл. 32 и 33.

\* \* \*

Изложенные в пп.2 и 4 этой главы методики расчетов напряженно-деформированного состояния железобетонных стержней, работающих с трещинами, построены в предположении прямоугольной эпюры нормальных напряжений в сжатом бетоне. Имеются решения, учитывающие изменение формы эпюры сжимающих напряжений при длительном действии нагрузки, связанные с наличием нелинейной составляющей деформации ползучести бетона. В статье [75] изложено решение, представляющее развитие методики, описанной в п.2, на случай трапециевидной эпюры переменной формы (см. рис. 54). В монографии [20] и статье [21] задача решается на основе метода интегрального модуля, в статьях [26, 37] — с помощью метода упругих решений.

Исследования работы железобетонных стержней создали предпосылки, необходимые для решения такой сложной задачи, как расчет напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций, работающих с трещинами [2, 20, 56, 85, 88, 93 и 110].

## 5. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

**Предельная длительно действующая нагрузка.** Задача о несущей способности элементов железобетонных конструкций при длительном действии нагрузки наиболее полно изучена применительно к расчету сжато-изогнутых стержней по деформированной схеме. Вопрос о влиянии ползучести на несущую способность железобетонных стержней при других видах напряженного состояния, в частности изгибе, начал изучаться только последние годы и в теории ползучести является новым [87, 45, 46].

Будем считать предельной при длительном действии (или предельной длительно действующей) нагрузку, которая, будучи приложенной в определенный момент времени или в течение ограниченного промежутка времени, приведет элемент к первому предельному состоянию после неограниченно большого периода ее действия [87].

Очевидно, что обоснованное решение вопроса о расчете железобетонных конструкций по первому предельному состоянию в условиях длительного действия нагрузки может быть построено только с учетом всех основных факторов, определяющих длительное сопротивление. Для отдельного элемента речь идет о зависимости между пределом прочности бетона и продолжительностью действия нагрузки с учетом влияния условий внешней среды, о перераспределении во времени внутренних усилий в элементе, а также об изменении усилий, передающихся на элемент. Условие прочности поперечного сечения железобетонного стержня с обычной арматурой при длительном действии нагрузки в общем случае может иметь такую структуру

$$Nm \leq \Phi (R, k_{b1}, k_b, S_b; R_{ac}, S_a, k_a; R'_{ac}, S'_a, k'_a), \quad (498)$$

где  $m$  — коэффициент, отражающий влияние длительности действия нагрузки на обобщенное внутреннее усилие, вычисленное с учетом возможных перегрузок;  $k_{b1}$  — коэффициент, учитывающий изменение прочности длительно нагруженного бетона и назначаемый с учетом деструктивных процессов;  $k_b$ ,  $k_a$  и  $k'_a$  — коэффициенты, представляющие влияние ползучести бетона } на величину геометрических характеристик поперечного сечения нагруженного стержня  $S_b$ ,  $S_a$  и  $S'_a$ .

**Экспериментальные данные.** Анализ показал, что с точки зрения длительного сопротивления железобетонных стержней граничными являются простое сжатие (растяжение) и изгиб. В первом случае при достаточно высоких сжимающих силах напряжения в арматуре, имеющей площадку текучести, близки или равны пределу пропорциональности  $\sigma_T$ . Поэтому в условиях длительного действия постоянной нагрузки напряжения в бетоне заметно не изменяются во времени, т. е. бетон работает примерно так, как в сжатой призме. Предельная длительно действующая нагрузка может уменьшаться по сравнению с предельной кратковременной только в силу процесса разуплотнения бетона, т.е. в силу  $R_{пр}^*(t) < R_{пр}(t)$ ; в СНиП II-21-75 это учитывается введением коэффициента условий работы  $m_{б1} \leq 1$ .

Во втором случае, т. е. при изгибе балки с ненапряженной арматурой, при длительном действии нагрузки происходит перераспределение усилий между бетоном и арматурой; напряжения в сжатом бетоне уменьшаются (см. рис. 54), в растянутой арматуре увеличиваются (см. табл. 25). Естественно, что несущая способность балки при длительном действии нагрузки связана не только с изменением состояния бетона под нагрузкой, но и с перераспределением внутренних усилий. Для получения представления о суммарном влиянии этих процессов на несущую способность железобетонных балок были выполнены специальные опыты, которые позволили установить следующие особенности длительного сопротивления изогнутых армированных элементов, находящихся в нормальных условиях (в неагрессивных средах). В стержнях с малыми и умеренными коэффициентами армирования в тех случаях, когда разрушение начинается с течения арматуры, предельная нагрузка при длительном действии меньше, чем при кратковременном. В стержнях с высокими коэффициентами армирования снижение прочности бетона в условиях длительного сжатия компенсируется падением напряжений в сжатой зоне; разрушение переармированного стержня, находящегося длительное время под нагрузкой, происходит только после дополнительного нагружения.

Для иллюстрации сказанного на рис. 58 показана кривая зависимости между относительным уровнем длительно действующей нагрузки  $\eta_d = M_d/M_p(\tau_1)$  и временем  $t_{пл} - \tau_1$ , проходящим до момента начала появления пластических деформаций растянутой арматуры. Кривая получена на основании испытаний 12 железобетонных балок из бетона марки

Таблица 34. Характеристики сопротивления железобетонных балок

| Литературный источник | $\mu$  | $\eta = \frac{M(\tau_1)}{M_p(\tau_1)}$ | Разрушающие моменты, кН-м |               |            | $\frac{M_p(\tau_2)}{M_p(\tau_1)}$ | $\frac{M_p^*(t)}{M_p(\tau_1)}$ | $\frac{M_p^*(t)}{M_p(\tau_2)}$ |
|-----------------------|--------|--|---------------------------|---------------|------------|-----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
|                       |        |  | $M_p(\tau_1)$             | $M_p(\tau_2)$ | $M_p^*(t)$ |                                   |                                |                                |
| [46]                  | 0,0388 | 0,9                                    | 18,15                     | 23,30         | 21,59      | 1,28                              | 1,19                           | 0,93                           |
| [45]                  | 0,028  | 0,78                                   | 10,99                     | 11,99         | 13,46      | 1,09                              | 1,23                           | 1,12                           |
| [58]                  | 0,0396 | 0,4                                    | 21,93                     | 21,5          | 27,83      | 0,98                              | 1,27                           | 1,29                           |
| [58]                  | 0,051  | 0,4                                    | 23,38                     | 21,6          | 30,6       | 0,92                              | 1,31                           | 1,42                           |

Примечание:  $t = \tau_2$ : в опытах [46]  $t = 648$  сут, в опытах [45]  $t = 1030$  сут, в [58]  $t = 390$  сут.

M300, имеющих обычную одиночную арматуру ( $\mu = 0,0116$ ) и загружавшихся в возрасте бетона 28 сут [46]. Если считать, что начало развития пластических деформаций в растянутой арматуре является признаком потери несущей способности (см. п. 8 СНиП II-A.10-71), то кривую на рис. 58 можно рассматривать как кривую длительного сопротивления железобетонного стержня при изгибе. Видно, что найденная таким способом предельная длительно действующая нагрузка составляет 0,85 кратковременной.

В табл. 34, построенной по данным опытов [46], а также опытов, описанных в [45, 58], приведены характеристики несущей способности перearмированных железобетонных балок. В табл. 34  $M(\tau_1)$  — моменты от длительно действующей нагрузки,  $M_p(\tau_1)$  и  $M_p(\tau_2)$  — разрушающие моменты для ранее не загружавшихся балок в возрасте  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , соответствующих приложению длительной нагрузки и догруже-

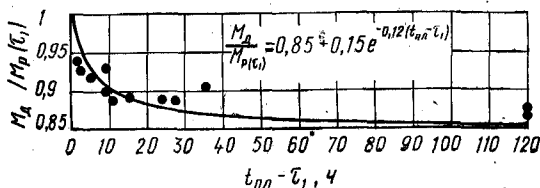


Рис. 58. Зависимость между временем пребывания балок под нагрузкой до начала развития пластических деформаций в арматуре  $t_{пл} - \tau_1$  и относительным уровнем загрузки  $M_d / M_p(\tau_1)$

нию,  $M_p^*(t)$  — разрушающие моменты при догрузении для балок, находившихся под нагрузкой в течение промежутка времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$ .

Как видно из 1-й строки табл. 34 в опытах [46] ( $\tau_1 = 28$  сут,  $\tau_2 = 648$  сут) для разрушения перестроенных балок, длительное время находившихся под высокой нагрузкой  $\eta = 0,90$ , пришлось увеличить изгибающий момент до  $1,19 M(\tau_1)$ . Это увеличение несущей способности связано с уменьшением во времени напряжений в сжатом бетоне вследствие перераспределения внутренних усилий; расчет показал, что в данном случае такое уменьшение составило примерно 16%. Однако уменьшение момента  $M_p^*(t)$  по сравнению с моментом  $M_p(\tau_2)$  и результаты ультразвукового прозвучивания свидетельствуют о наличии некоторого разуплотнения бетона сжатой зоны. Для создания представления о зависимости между уровнем длительно действующей нагрузки  $\eta$  и состоянием бетона сжатой зоны в табл. 34 приведены данные и об опытах, проводившихся при более низких  $\eta$  [45, 58]. Из этих данных видно, что при  $\eta = 0,40$  и  $0,78$ , во-первых, отношение  $M_p^*(t)/M_p(\tau_1)$  больше, чем при  $\eta = 0,9$ ; во-вторых,  $M_p^*(t) > M_p(\tau_2)$ , что естественно говорит о повышении несущей способности балки, находившейся под нагрузкой, по сравнению с незагруженной балкой-близнецом.

Изложенное дает самое общее представление о рассматриваемом вопросе. При его более детальном решении необходимо прежде всего иметь в виду влияние окружающей среды на такие процессы, происходящие в загруженной балке, как ползучесть, старение и изменение структуры бетона.

Сопротивление бетона сжатой зоны изгибаемых и внецентренно-сжатых железобетонных стержней при длительном действии нагрузки. Сказанное в п.5 главы V, а также результаты работы [42] позволяют записать формулу для определения длительного сопротивления бетона  $R_d^*(t, \tau_1)$  при сжатии в виде

$$R_d(t, \tau_1) = m(t, \tau_1) R_{пр}(t) H_q(t, \tau_1), \quad (499)$$

где

$$H_q(t, \tau_1) = [K\zeta(t, \tau_1)]^{-0,5}, \quad (500)$$

причем  $K_d(t, \tau_1)$  определяется согласно (337);  $m(t, \tau_1)$  учитывает влияние длительного обжата на прочность бетона при кратковременном действии нагрузки и, по данным Ю. В. Зайцева, находится в пределах 1—1,2.

Формула (499) может быть использована для оценки несущей способности бетона при действии как постоянных, так и переменных напряжений, в частности для оценки длительного сопротивления бетона сжатой зоны железобетонных стержней. В последнем случае необходимо заменить  $m(t, \tau_1)$  на  $\bar{m}(t, \tau_1)$

$$R_d^*(t, \tau_1) = \bar{m}(t, \tau_1) R_{пр}(t) H_q(t, \tau_1), \quad (501)$$

причем  $\bar{m}(t, \tau_1)$  — функция, аналогичная  $m(t, \tau_1)$ , но дополнительно учитывающая особенности влияния напряженного состояния, например, сжатой зоны железобетонной балки.

При использовании формул (499) и (501) необходимо иметь в виду, что эти формулы позволяют связать  $R_d^*(t, \tau_1)$  с  $R_{пр}(t)$  при заданном законе изменения сжимающих напряжений во времени, представленном  $\zeta(t, \tau)$  [см. формулу (337)]. При этом для момента разрушения  $R_d^*(t, \tau_1) = \sigma^*(t)$ . Начальный уровень напряжения, при котором разрушение произойдет в момент времени  $t$ , разыскивается с помощью зависимости

$$\sigma(\tau_1) = \zeta(t, \tau_1) R_d^*(t, \tau_1), \quad (502)$$

где

$$\zeta(t, \tau_1) = \sigma(\tau_1) / \sigma(t). \quad (503)$$

Изложенная методика является первой попыткой оценить расчетным путем длительное сопротивление бетона сжатой зоны изогнутых и внецентренно сжатых железобетонных стержней и нуждается в дальнейшем совершенствовании.

## Список литературы

1. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1966, с. 444.

2. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1973, с. 432.

3. Александровский С. В.; Бондаренко В. М.; Прокопович И. Е. Приложение теории ползучести к практическим расчетам железобетонных конструкций. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона. / НИИЖБ Госстроя СССР. М., Стройиздат, 1976, с. 256—301.

4. Александровский С. В.; Васильев П. И. — Экспериментальные исследования ползучести бетона. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона / НИИЖБ Госстроя СССР. М., Стройиздат, 1976, с. 97—152.

5. Александровский С. В., Коган Е. А. Экспериментально-теоретические исследования термонапряженного состояния бетонных брусьев, заземленных по торцам, с учетом ползучести. — В кн.: Проблемы ползучести и усадки бетона. М., Стройиздат, 1974, с. 206—218.

6. Александровский С. В., Попкова О. М. Исследование нелинейных деформаций бетона молодого возраста при ступенчато-изменяющихся деформациях сжатия. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона / Материалы совещания, подготовленные НИИЖБ. М., Стройиздат, 1969, с. 30—47.

7. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М. — Л., Гостехиздат, 1952, с. 323.

8. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. — ПММ, 1959, т. XXIII, № 5, с. 901—924.

9. Арутюнян Н. Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. — В кн.: Механика в СССР за 30 лет. т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М., «Наука», 1972, с. 155—202.

10. Арутюнян Н. Х.; Александровский С. В. Современное состояние развития теории ползучести бетона. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона / НИИЖБ Госстроя СССР. М., Стройиздат, 1967, с. 5—96.

11. Белянкин Ф. П. Современные методы расчета деревянных конструкций. Киев, изд-во АН УССР, 1951, с. 20.

12. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. М., Стройиздат, 1961, с. 96.

13. Берг О. Я.; Прокопович И. Е.; Щербаков Е. Н.; Заста-

ва М. М. Вероятностно-статистическое направление в изучении усадки и ползучести бетона. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1976, № 3, с. 9—28.

14. Берг О. Я., Рожков А. И. К учету нелинейной ползучести бетона. — Бетон и железобетон, 1967, № 9, с. 29—32.

15. Берг О. Я., Щербаков Е. Н. К учету нелинейной связи напряжений и деформаций ползучести бетона в инженерных расчетах. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит. - 1973, № 12, с. 14—21.

16. Берг О. Я., Щербаков Е. Н., Писанко Г. Н. Высокопрочный бетон. М., Стройиздат, 1971, с. 208.

17. Берг О. Я., Щербаков Е. Н., Прокопович И. Е., Застава М. М. К обоснованию единой методики нормирования деформаций ползучести и усадки бетона. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1977, № 3, с. 3—6.

18. Бердичевский Г. И., Маркаров Н. А. Технологические факторы трещиностойкости и прочности предварительно-напряженных железобетонных конструкций. М., Стройиздат, 1964, с. 152.

19. Бовин В. А. Основы теории железобетонных сооружений. — В сб.: Опытнo-теоретические исследования железобетонных конструкций. М., Гострансжелдориздат, 1940, с. 1—8.

20. Бондаренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков, 1968, с. 324.

21. Бондаренко В. М., Глоба В. Г. Об обобщенных формах интегрального модуля деформаций. — В сб.: Проблемы ползучести и усадки бетона/ ЦП НТО стройиндустрии. М., Стройиздат, 1974, с. 181—185.

22. Варганян Г. В. Исследование влияния различных факторов на деформации бетона при знакопеременных воздействиях. Автореферат дисс. на соискание уч. степени канд. техн. наук. Л., 1969, с. 24.

23. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. — Изв. ВНИИГ, т. 49, 1953, с. 83—113.

24. Васильев П. И. Нелинейные деформации ползучести бетона. — Изв. ВНИИГ, т. 95, 1971, с. 59—69.

25. Васильев П. И., Гаврилин Б. А. Влияние температуры на ползучесть стареющего бетона. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона/9 Материалы совещания, подготовленные НИИЖБ, М., Стройиздат, 1969, с. 9—20.

26. Васильев П. И.; Страхов Д. А. Расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом ползучести. — Бетон и железобетон, 1975, № 1, с. 23—25.

27. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956, с. 420.

28. Вульфсон З. С. К нелинейной теории ползучести. — В сб.:



Ползучесть строительных материалов и конструкций/ЦНИИС. М., Стройиздат, 1964, с. 157—171.

29. Галустов К. З., Гвоздев А. А. К вопросу о нелинейной теории ползучести при сжатии. — Механика твердого тела, 1972, № 1, с. 85—92.

30. Гвоздев А. А. Ползучесть бетона и пути ее исследования. — В кн.: Исследования прочности, пластичности и ползучести строительных материалов. М., Госстройиздат, 1955, с. 126—137.

31. Гвоздев А. А. Замечание о нелинейной теории ползучести при одноосном сжатии. — Механика твердого тела, 1972, № 5, с. 33.

32. Гвоздев А. А., Галустов К. З., Яшин А. В. О некоторых отступлениях от принципа наложения в теории ползучести бетона. — Бетон и железобетон, 1967, № 8, с. 223—227.

33. Гвоздев А. А., Дмитриев С. А., Немировский Я. М. О расчете перемещений (прогибов) железобетонных конструкций по проекту новых норм (СНиП II-В. 1-62). — Бетон и железобетон, 1962, № 6, с. 245—250.

34. Гвоздев А. А., Яшин А. В., Галустов К. З. К вопросу об уточнении теории линейной ползучести бетона. — В сб.: Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций. М., Стройиздат, 1969, с. 19—37.

35. Голышев А. Б. Расчет предварительно-напряженных железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. М., Стройиздат, 1964, с. 451.

36. Григорян Г. С. О больших прогибах и устойчивости железобетонных гибких оболочек с учетом ползучести. — Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1970, с. 412—422.

37. Гусаков В. Н. Деформации и напряжения в железобетонных элементах с трещинами. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона. М., Стройиздат, 1969, с. 103—114.

38. Десов А. Е., Вахрушев А. Н. Эталонный бетон. — В кн.: Проблемы ползучести и усадки бетона. М., Стройиздат, 1974, с. 49—58.

39. Десов А. Е., Красников К. Г., Цилюсани З. Н. Некоторые вопросы теории усадки бетона. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона. М., Стройиздат, 1976, с. 211—255.

40. Дмитриев С. А., Крылов С. М., Карпенко Н. И., Гуца Ю. П. Предельные состояния элементов железобетонных конструкций/ Под ред. С. А. Дмитриева. М., Стройиздат, 1976, с. 216.

41. Европейский комитет по бетону. Международные рекомендации для расчета и осуществления обычных и предварительно-

напряженных конструкций. НИИЖБ Госстроя СССР, М., 1970, с. 235.

42. Зайцев Ю. В.; Щербаков Е. Н. К обоснованию некоторых критериев расчета преднапряженных железобетонных элементов. — Сообщение, представленное на VIII Международный конгресс ФИП (Лондон, 30 апреля — 5 мая 1978 г.). М., 1978, с. 22.

43. Зедгенидзе В. А. Влияние ползучести и старения на напряженное и деформированное состояние изгибаемых предварительно напряженных железобетонных элементов. — В сб.: Строительные конструкции, 1969, вып. XII, Киев, Будивельник, с. 21—31.

44. Зедгенидзе В. А. Экспериментальное исследование деформаций изгибаемых железобетонных балок с преднапряженной арматурой при длительном действии нагрузок. — В сб.: Строительные конструкции 1977, вып. XXIX, Киев, Будивельник, с. 60—68.

45. Зедгенидзе В. А.; Оплачко В. М., Половец В. И. О несущей способности железобетонных стержней при длительном действии нагрузки. — В сб.: Строительные конструкции, 1973, вып. XXI, Киев, Будивельник, с. 158—162.

46. Зедгенидзе В. А.; Половец В. И. О длительной несущей способности изгибаемых элементов. — Бетон и железобетон, 1977, № 4, с. 40—41.

47. Иванов Ю. М. Последствие в древесине конструктивных элементов. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1977, № 1.

48. Иванов Ю. М. Влияние на коэффициент  $\phi$  изменения во времени деформаций и прочности древесины. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1977, № 11.

49. Каранфилов Т. С.; Волков Ю. С. Обзор исследований по прочности и деформативности бетона при многократном приложении нагрузки. — Труды Гидропроекта, 1963, № 10, с. 167—191.

50. Карапетян К. С. О теоретических и экспериментальных исследованиях в области теории ползучести. — Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, в. XXIX, № 1, с. 27—38.

51. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование отношений мер ползучести бетона при сжатии и растяжении. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1972, № 5, с. 196—201.

52. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М., Стройиздат, 1976; с. 208.

53. Киреева С. В.; Русинов И. А. Призменная прочность и начальный модуль упругости бетона семилетнего возраста, их зависимости от некоторых факторов. — В сб.: Строительные конструкции, 1974, вып. XXIV, Киев, Будивельник, с. 108—114.

54. Коковин О. А. Деформации изгибаемых и внецентренно сжатых элементов при кратковременно действующей нагрузке в ста-

дях, близких к разрушению. — В сб.: Прочность и жесткость железобетонных конструкций. М., Стройиздат, 1968, с. 104—125.

55. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения интегральных уравнений первого и второго рода. — ДАН СССР, 1955, т. 100, № 3, с. 413—417.

56. Крылов С. М. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях, М., Стройиздат, 1964, с. 167.

57. Лившиц Я. Д. Расчет железобетонных конструкций с учетом ползучести и усадки бетона. Киев, «Вища школа», 1971, с. 232.

58. Лившиц Я. Д., Литвяк С. И. К оценке несущей способности железобетонных пролетных строений мостов. — Транспортное строительство, 1974, № 4, с. 42—43.

59. Лившиц Я. Д., Ткачук В. М. Исследование ползучести бетона при плоском напряженном состоянии. — Бетон и железобетон, 1973, № 11, с. 27—29.

60. Львовский Е. Н. Пассивный и активный эксперимент при исследовании механических характеристик бетона. Кишинев, Картя Молдавеныскэ, 1970.

61. Макаренко А. П. Снижение сопротивления бетона растяжению после длительного сжатия. FIP, USSR, MENBERCROIP, М., 1974, с. 8.

62. Малахова Н. А. Об устойчивости в условиях ползучести нелинейно-деформирующихся систем. — Изв. вузов. Сер. стр.-во и архит. 1969, № 6, с. 32—37.

63. Манукян М. М. Деформация и напряжение в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и частично растянутой зон бетона. Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1956, т. IX, вып. 9, с. 27—45.

64. Манукян М. М. Кручение тел с учетом ползучести. Ереван, Изд-во Ереванского ун-та, 1973, с. 232.

65. Маслов Г. Н. Термическое напряжение бетонных массивов при учете ползучести. — Тр. ВНИИГ, 1940, № 28, с. 175—188.

66. Мельник Р. А. Применение функций напряжений типа  $F(\sigma_0) = \alpha \sigma_0^m$  для определения величин деформаций ползучести бетона. — В сб.: Строительные конструкции, 1966, вып. IV, Киев, Будивельник, с. 178—193.

67. Мельникова Л. В. К вопросу о механизме процесса и мере ползучести бетона при двухосном сжатии. — В сб.: Строительные конструкции, 1973, вып. XXII, Киев, Будивельник, с. 136—144.

68. Методические рекомендации по исследованию ползучести и усадки бетона/НИИЖБ, М., 1975, с. 118.

69. Методические указания по расчету потерь предварительного напряжения, вызванных ползучестью и усадкой в железобетонных

конструкциях транспортных сооружений/ЦНИИС Минтрансстроя СССР, М., 1972, с. 41.

70. Михайлов В. Г. О длительном сопротивлении древесины и методе его ускоренного определения. — В сб.: Исследования прочности и деформативности древесины. М., Госстройиздат, 1956, с. 107—117.

71. Мурашев В. И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона. М., Машстройиздат, 1950, с. 268.

72. Мурашев В. И., Сигалов Э. Е., [Байков В. Н.] Железобетонные конструкции. Общий курс/Под ред. П. Л. Пастернака. М., Госстройиздат, 1962, с. 660.

73. Немировский Я. М. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов при кратковременном и длительном нагружении. — Бетон и железобетон, 1955, № 5, с. 172—176.

74. Оплачко В. М. Изгиб железобетонной балки с обычной арматурой при длительном действии нагрузки и нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями бетона. — Изв. вузов. Сер. стр.-во и архит., 1968, № 4, с. 21—28.

75. Оплачко В. М. Изгиб железобетонной балки в условиях нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести бетона. — В сб.: Строительные конструкции, 1968, вып. X. Киев, Будивельник, с. 141—151.

76. Оплачко В. М. Экспериментальные исследования работы железобетонных балок при длительном действии высоких нагрузок. — В сб.: Строительные конструкции, 1977, вып. XXIX, Киев, Будивельник, с. 74—81.

77. Оплачко В. М. О практическом определении перемещений железобетонных балок с высоким, длительно действующим уровнем нагрузки. — В сб.: Строительные конструкции, 1974, вып. XXIV, с. 149—157.

78. Орлов А. Н. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии сжато-изогнутого железобетонного стержня на основе линейной теории ползучести. — В сб.: Строительные конструкции, 1978, вып. XXXI, Киев, Будивельник, с. 80—92.

79. Орлов А. Н., Прокопович И. Е. О влиянии ползучести и старения на величины критических сил для гибких однородных и неоднородных стоек. — Изв. АрмССР. Механика, 1969, т. XXIII, № 3, с. 63—71.

80. Педаховский И. И. Дискретно-континуальный метод в линейной теории упруго-ползучего тела. — В кн.: Применение электронных вычислительных машин в строительной механике, 1968, с. 96—101.

81. Пекус-Сахновский Д. Н. Экспериментальные исследования гибких железобетонных стержней при длительном действии нагруз-

ки. — В сб.: Строительные конструкции, 1965, вып. II, Киев, Будивельник.

82. Петров В. И.; Бильченко А. В. Экспериментально-теоретическое исследование ползучести бетона при двухосном сжатии. — В кн.: Проблемы ползучести и усадки бетона, М., Стройиздат, 1974, с. 34—40.

83. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. — ПММ, 1956, т. XX, вып. 6, с. 680—687.

84. Прокопович И. Е. Практический способ определения температурно-влажностных напряжений в массивных прямоугольных бетонных блоках. — Гидротехническое строительство, 1964, № 5, с. 17—23.

85. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Стройиздат, 1963, с. 260.

86. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на устойчивость сжатых стержней. — Строительная механика и расчет сооружений, 1967, № 1, с. 5—9.

87. Прокопович И. Е. О расчете стержневых железобетонных конструкций по первому предельному состоянию в условиях длительного действия нагрузки. — В сб.: Строительные конструкции, 1971, вып. XVIII, Киев, Будивельник, с. 24—33.

8. Прокопович И. Е.; Зедгенидзе В. А. Об учете перераспределения внутренних усилий в железобетонных статически неопределимых конструкциях при длительном действии нагрузки. — В сб.: Строительные конструкции, вып. XIX, Киев, Будивельник, с. 95—100.

89. Прокопович И. Е.; Застава М. М. О выборе выражения для описания меры ползучести тяжелых бетонов при умеренных сжимающих напряжениях. — В сб.: Строительные конструкции, 1976, вып. XXVIII, Киев, Будивельник, с. 3—11.

90. Прокопович И. Е.; Кобринец В. М. Влияние ползучести на устойчивость тонкостенных стержней. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1969, № 12, с. 33—38.

91. Прокопович И. Е.; Линник А. С. О влиянии ограниченной нелинейной ползучести на устойчивость сжатых стержней. — Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 5, с. 47—51.

92. Прокопович И. Е.; Малахова Н. А.; Михеева Н. Р. О возможности перехода к новым равновесным формам нелинейно-деформирующихся систем в условиях неустановившейся ползучести. — Строительная механика и расчет сооружений, 1977, № 5, с. 15—20.

93. Прокопович И. Е.; Моргун А. С. Расчет железобетонных стержневых конструкций, имеющих трещины, при длительном дей-

ствии нагрузки. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1975, № 5, с. 25—30.

94. Прокопович И. Е.; Рекша В. В. О напряженно-деформированном состоянии тела, обладающего ползучестью и усиленного связями. — Изв. АН АрмССР, 1969, XXII, № 1, с. 77—92.

95. Прокопович И. Е.; Слезингер И. Н.; Штейнберг М. В. Расчет цилиндрических оболочек и призматических складок. Киев, Будивельник, 1967, с. 240.

96. Прокопович И. Е.; Темнов И. И. Экспериментальное исследование деформаций железобетонных балок. — В сб.: Строительные конструкции, 1969, вып. XIII, Киев, Будивельник, с. 56—68.

97. Прокопович И. Е.; Темнов И. И.; Хлоповский Ю. Н. Определение напряжений, возникающих в железобетонных изделиях при термообработке. — Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1975, вып. 103, Л., Энергия, с. 195—199.

98. Прокопович И. Е.; Улицкий И. И. О теориях ползучести бетона. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1963, вып. 10, с. 13—34.

99. Прокопович И. Е.; Шафрановский Ю. А.; Линник А. С. О некоторых вопросах применения теории ползучести к расчету железобетонных конструкций на длительные эксплуатационные воздействия. — Изв. АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 3, с. 63—73.

100. Прокопович И. Е.; Щербаков Е. Н.; Штейнберг М. В.; Завалин В. А. Практические рекомендации по расчету потерь предварительного напряжения и перемещению железобетонных пролетных строений мостов. — Транспортное строительство, 1978, № 7, с. 10—14.

101. Прокопович И. Е.; Яременко А. Ф. Об особенностях ползучести бетонных дисков при двухосном сжатии. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1975, № 9, с. 20—23.

102. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966, с. 752.

103. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., Наука, 1977, с. 384.

104. Рекомендации по прогнозированию основных физико-механических свойств бетона при проектировании железобетонных конструкций и регулированию некоторых свойств бетона технологическими приемами. Постоянная комиссия СЭВ по строительству. М., ЦНИИС, 1976, с. 48.

105. Реминец Г. М. К расчету перемещения (прогибов) предварительно напряженных железобетонных элементов при длительном действии нагрузки. — В сб.: Строительные конструкции, 1966, вып. 4, Киев, Будивельник, с. 144—156.

106. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., Гостехиздат, 1949, с. 252.
107. Ржаницын А. Р. Теоретические предпосылки к построению методов расчета деревянных конструкций во времени. — В кн.: Исследования прочности и деформативности древесины. М., Госстройиздат, 1956, с. 21—31.
108. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968, с. 416.
109. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. — ПММ, 1973, т. XVII, вып. 1, с. 99—106.
110. Руководство по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций/НИИЖБ, М., Стройиздат, 1975, с. 193.
111. Сагоян А. С. Экспериментальное исследование ползучести древесины и влияния ее на работу некоторых деревянных конструкций. — Автореферат дисс. на соискание уч. степени канд. техн. наук. Ереван, 1954, с. 23.
112. Саталкин А. В., Сенченко Б. А. Раннее нагружение бетона и железобетона в мостостроении. М., Автотрансиздат, 1956, с. 216.
113. Стрельчук Н. Д., Хасин Г. Л., Варданян Г. С. Современные возможности моделирования ползучести бетона поляризационно-оптическим методом. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций/НИИЖБ. М., Стройиздат, 1976, с. 153—184.
114. Таль К. Э., Чистяков Е. А. Экспериментальные исследования гибких железобетонных стержней при длительных нагружениях. — В сб.: Исследования прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций, 1962, вып. 26, М., Стройиздат, с. 30—58.
115. Темнов И. И. Изгиб железобетонных балок с обычной арматурой при длительной нагрузке. — Изв. вузов. Сер. стро-во иarchit., 1962, № 3, с. 59—75.
116. Темнов И. И. О применении теории ползучести к решению задачи о напряженном состоянии железобетонного элемента в процессе термообработки. — Изв. АН АрмССР, 1974, XXVII, № 5, с. 81—90.
117. Темнов И. И., Зедгенидзе В. А. Приближенный способ определения перемещений железобетонных балок при длительном действии нагрузки. — В кн.: Ползучесть и усадка бетона, Киев, 1969, с. 164—173.
118. Темнов И. И., Хлоповский Ю. Н. Исследование упруго-мгновенных деформаций, деформаций ползучести и старения бетона, прогреваемого паром. — В кн.: Исследования по термике бетонных и железобетонных гидротехнических сооружений/ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, Л., Энергия, 1975, с. 220—224.

119. Улицкий И. И. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов, Киев, Будивельник, 1967, с. 348.
120. Улицкий И. И., Чжан Чжун — яо, Голышев А. Б. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Госстройиздат УССР, 1960, с. 495.
121. Харлаб В. Д. К общей линейной теории ползучести. — Изв. ВНИИГ, 1961, т. 68, с. 217—240.
122. Харлаб В. Д. Задача о напряженно-деформированном состоянии системы с увеличивающимся количеством связей. — В кн.: Исследования по строит. механике. М., Транспорт, 1966.
123. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. Пер. с англ. М., ИЛ., 1955, с. 140.
124. Цицосани З. Н. Усадка и ползучесть бетона. Тбилиси, Изд-во АН ГрузССР, 1963, с. 174.
125. Чистяков Е. А.; Беликов В. А. Изгиб и внецентренное сжатие коротких и гибких элементов. — Бетон и железобетон, 1971, № 5, с. 10—14.
126. Шатохин В. И.; Зедгенидзе В. А. Исследование на универсальном стенде простых и неразрезных железобетонных балок. — Тезисы докладов по II симпозиуму «Экспериментальные исследования инженерных сооружений», Одесса, 1969, с. 75—80.
127. Шафрановский Ю. А. Ползучесть бетона при повторных нагрузках. — Изв. вузов. Сер: стр-во и архит., 1969, № 3, с. 3—9.
128. Швецов А. В. Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформативных свойств. — Гидротехническое строительство, 1952, с. 23—27.
129. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. — ПММ, т. XXIII, вып. 6, 1959, с. 1101—1106.
130. Шляпин В. А. Уравнение деформирования упруго-вязкого материала, обладающего нелинейной ползучестью. — Строительная механика и расчет сооружений, 1976, № 1, с. 30—33.
131. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949, с. 270.
132. Щербаков Е. Н.; Кичигина Г. И. Решение прикладных задач нелинейной теории ползучести на основе обобщенного представления функции напряжений. — Изв. вузов. Сер. стр-во и архит., 1971, № 12, с. 3—8.
133. Яременко А. Ф. К расчету железобетонных плит при длительном действии нагрузки. — В сб.: Строительные конструкции, 1971, вып. XVIII, Киев, Будивельник, с. 68—79.
134. Яценко Е. А. Экспериментальные исследования нелинейной ползучести бетона. — Науч. тр. КИСИ, 1972, вып. 20, с. 101—110.



135. Яценко В. Ф. Прочность и ползучесть сложных конструкций. Киев, Наукова думка, 1966, с. 204.
136. Яценко Е. А. Потеря длительной устойчивости железобетонных систем. — В сб.: Строительные конструкции, вып. 5, 1967, Киев. Будивельник, с. 60—64.
137. Яшин А. В. Ползучесть бетона в раннем возрасте. — В кн.: Об исследовании свойств бетона и железобетонных конструкций, 1959, вып. 4, Госстройиздат, с. 18—73.
138. Яшин А. В. Деформации бетона под длительным воздействием высоких напряжений и его длительное сопротивление сжатию. — В кн.: Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций. М., Стройиздат, 1969, с. 38—76.
139. Clucklich J. Rheological Behaviour of hardened Cement Paste under Low Stress. — Journal A. C. J. 1959, v. 56, № 4.
140. Hannant D. I. Creep and Creep recovery of Concrete Subjected to multiaxial compressive Stress JACI, mai, 1969.
141. Jasman S. Rheological Deformation of Concrete Plate Elements Building Science. — Pergamon Press. Printed in Great Britain, 1967.
142. Mejer H. G. Zum Kriechverhalten von Beton unter zweiachsigen Druck beanspruchung. — Materialprüfung, 1969, v. d. 11 № 3, 79—82.
143. Mitzel A. Reologia betonu. Warszawa, Arkady, 1972.
144. Neville A. Creep of Concrete Plain. — Reinforced and Prestressed, North Holland Publishing Company — Amsterdam, 1970.
145. Riisch/Jyngwirth. Stahlbeton — Spannbeton. Baud 2. Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinde auf des verhalten der Tragwerke Düsseldorf, Wemer — Verlag, 1976.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|  | Стр.      |
|--|-----------|
| Введение . . . . .   | 3         |
| <b>Глава I. Деформирование и сопротивление бетона при длительных воздействиях . . . . .</b>                      | <b>6</b>  |
| 1. Особенности строения и деформирования бетона . . . . .  | 6         |
| 2. Влияние уровня напряжений на деформации ползучести бетона. Функции напряжений . . . . .                       | 12        |
| 3. Длительное сопротивление бетона. Влияние предшествующего нагружения . . . . .                                 | 21        |
| 4. Кривые простой ползучести и усадки. Эталонный бетон . . . . .   | 24        |
| 5. Влияние возраста к моменту нагружения на деформативные свойства бетона . . . . .                              | 32        |
| 6. Ползучесть бетона при напряжениях, переменных во времени . . . . .  | 44        |
| 7. Ползучесть бетона при растяжении . . . . .  | 49        |
| 8. Коэффициенты поперечных деформаций бетона . . . . .   | 51        |
| 9. Особенности ползучести бетона при плоском напряженном состоянии . . . . .                                     | 51        |
| <b>Глава II. Деформирование и сопротивление древесины при длительных воздействиях . . . . .</b>                  | <b>53</b> |
| 1. Строение и характер деформирования древесины. Длительное сопротивление . . . . .                              | 53        |
| 2. Влияние уровня и продолжительности действия постоянных напряжений . . . . .                                   | 55        |
| 3. Длительное деформирование древесины при переменных напряжениях. Принцип наложения . . . . .                   | 57        |
| 4. Учет влияния переменной во времени влажности на длительное деформирование древесины . . . . .                 | 58        |
| <b>Глава III. Зависимости и уравнения линейной теории ползучести стареющего тела . . . . .</b>                   | <b>60</b> |
| 1. Гипотезы и предпосылки линейной теории ползучести стареющего тела . . . . .                                   | 60        |
| 2. Зависимости между напряжениями и деформациями . . . . .   | 63        |
| 3. Основное интегральное уравнение линейной теории ползучести . . . . .  | 67        |
| 4. Зависимость между деформациями и напряжениями, представленная с помощью резольвенты . . . . .                 | 69        |
| 5. Решение основного интегрального уравнения линейной теории ползучести . . . . .                                | 72        |
| 6. Вычисление напряжений с учетом влияния ползучести и старения в стержне, жестко заделанном по концам . . . . . | 79        |

- |   |    |
|---|----|
| 7. Экспериментальные исследования напряжений в стержнях, вызванных вынужденными деформациями . . . . .  | 95 |
| 8. Зависимости и уравнения, применяемые для описания трехмерного напряженно-деформированного состояния однородного изотропного тела . . . . . | 98 |

**Глава IV. Основные задачи линейной теории ползучести** 102

- |  |     |
|--|-----|
| 1. Напряженное состояние однородного изотропного сплошного тела при действии внешних сил и наличии вынужденных деформаций . . . . .                        | 102 |
| 2. Системы, составленные из однородных изотропных элементов . . . . .  | 113 |
| 3. Решение плоской контактной задачи с учетом ползучести . . . . .   | 120 |
| 4. Длительное деформирование и устойчивость сжатого стержня, выполненного из материала, обладающего ползучестью. Расчет по деформированной схеме . . . . . | 125 |
| 5. Влияние ползучести на устойчивость нелинейно-деформирующихся систем . . . . .   | 136 |

**Глава V. Некоторые сведения из нелинейной теории ползучести** . . . . . 145

- |   |     |
|---|-----|
| 1. Гипотезы и предпосылки нелинейной теории ползучести стареющего тела . . . . .                                | 145 |
| 2. Нелинейная наследственная теория старения . . . . .  | 146 |
| 3. Решение релаксационной задачи с помощью нелинейной наследственной теории старения . . . . .                  | 150 |
| 4. Применение нелинейной наследственной теории старения к решению задачи устойчивости сжатого стержня . . . . . | 153 |
| 5. Краткие сведения из механики длительного разрушения . . . . .  | 160 |

**Глава VI. Железобетонные конструкции, работающие без трещин** . . . . . 162

- |  |     |
|--|-----|
| 1. Напряженное состояние железобетонных элементов с одиночной арматурой . . . . .                                      | 164 |
| 2. Железобетонные стержни . . . . .  | 169 |
| 3. Напряженно-деформированное состояние тела, обладающего линейной ползучестью и усиленного упругими связями . . . . . | 178 |
| 4. Решение задачи о напряженном состоянии железобетонного стержня с учетом нелинейной ползучести бетона . . . . .      | 184 |
| 5. Напряженное состояние железобетонного элемента в процессе термообработки . . . . .                                  | 188 |
| 6. Длительное деформирование сжатого железобетонного стержня . . . . .   | 194 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава VII. Напряженное и деформированное состояния железобетонных конструкций, работающих с трещинами</b> . . . . .        | 198 |
| 1. Зависимости между напряжениями и деформациями . . . . .  | 198 |
| 2. Напряженное и деформированное состояния преднапряженных железобетонных стержней при длительном действии нагрузки . . . . . | 200 |
| 3. Вывод формулы для определения $\psi_a(t)$ . . . . .  | 211 |
| 4. О практических способах определения перемещений железобетонных балок при длительном действии нагрузки . . . . .            | 215 |
| 5. Несущая способность изгибаемых железобетонных стержней при длительном действии нагрузки . . . . .                          | 222 |
| Список литературы . . . . .   | 227 |

Игорь Евгеньевич Прокопович,  
Вахтайг Афтандилович Зедгенидзе

### ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Редакция литературы по строительным  
материалам и конструкциям

Зав. редакцией *П. И. Филимонов*

Редактор *И. С. Бородина*

Мл. редактор *Л. А. Табачник*

Внешнее оформление художника *А. А. Бекназарова*

Технический редактор *В. М. Родионова*

Корректоры *Л. П. Атавина, Л. П. Бирюкова*

**ИБ № 700**

Сдано в набор 7.08.79. Подписано в печать 18.10.79.

Формат 84×108<sup>1/2</sup>. Бумага тип. № 3. Печать высокая. Гарнитура «Литературная». Усл. печ. л. 12,6 Уч.-изд. л. 12,05 Тираж 3.000 экз.

Изд. № А—XIII—6243

Зак. № 1290

Цена 2 руб.

Стройиздат, 101442, Москва, Калаяевская, 23а

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома

Государственного комитета СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

Москва, 129041, Б. Переяславская, 46