

# РАСЧЕТ ФЕРМЫ

*Артамонова Е.Н., Зайцева И.М.*

Саратовский государственный технический университет  
г.Саратов,Россия

# THE COMPUTATION FOR A GIRDER

Artamonova E.N., Zaitseva I.M.

Saratov State Technical University

Saratov, Russia

## СОДЕРЖАНИЕ.

1. Введение.....	2
2. Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм...	3
3. Геометрическая неизменяемость ферм.....	5
4. Статический расчет ферм.....	8
5. Пример расчета ферм на неподвижную нагрузку.....	17
6. Дополнительные способы расчета ферм.....	25
7. Приложения.....	30
8. Литература.....	38

Приведены указания для самостоятельного решения задач по расчету плоской фермы. Разнообразие конструктивных решений ферм, применяемых в практике проектирования машиностроительных, строительных и транспортных конструкций иногда делает затруднительным проведение полной их классификации.

Классификацию ферм проведем по следующим признакам:

1) очертанию поясов фермы; 2) типу решетки; 3) типу опирания фермы; 4) назначению; 5) уровню езды; 6) характеру формирования усилий в стержнях фермы и т.п.

Для расчета стержней фермы используется основной статический метод расчета стержневых систем – способ простых сечений: сечение рассекает три связи, не параллельные и не пересекающиеся в одной точке. Целесообразно не составлять совместную систему из трех

уравнений равновесия для определения трех неизвестных реакций, а стараться использовать

способы вычислений, приводящих к элементарным вычислениям: три основных варианта

способа простых сечений (проекции, вырезания узлов и моментной точки). Способ вырезания узла заключается в мысленном вырезании узла фермы с заменой действия на него стержней соответствующими усилиями.

Эти усилия связаны между собой и приложенной к стержню внешней нагрузкой (или опорными реакциями) посредством статических уравнений равновесия. Для любого узла можно составить два таких уравнения – равенства нулю суммы проекций всех сил, например, на вертикальную и горизонтальную оси.

Способ проекций состоит в мысленном рассечении фермы на две части и рассмотрении равновесия одной из них. При этом действие отбрасываемой части на рассматриваемую должно быть заменено усилиями в стержнях ферм.

Способ моментной точки заключается в составлении уравнений равновесия в виде суммы моментов всех сил, действующих слева или справа от моментной точки. Моментная точка для искомого усилия – точка пересечения двух остальных усилий, попадающих в сечение.

### **Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм.**

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм, без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней  $k$  и число узлов  $n$  связаны соотношением

$$k = 2n - 3$$

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Расстояние между осями опор фермы называется ее *пролетом*. Стержни, расположенные по внешнему контуру, называются *поясными* и образуют пояса. Вертикальные стержни, соединяющие пояса, называются *стойками*, наклонные – *раскосами*. Стойки

и раскосы образуют *решетку* фермы. Расстояние между соседними узлами пояса фермы называется *панелью*.

Классификацию ферм обычно проводят по *пяти признакам*:

1) характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опирания фермы; 4) назначению; 5) уровню езды.

По характеру очертания различают фермы с параллельными поясами (рис.1, а), треугольные фермы (рис.1, б) и с ломанным, или полигональным расположением поясов (рис.1, в).

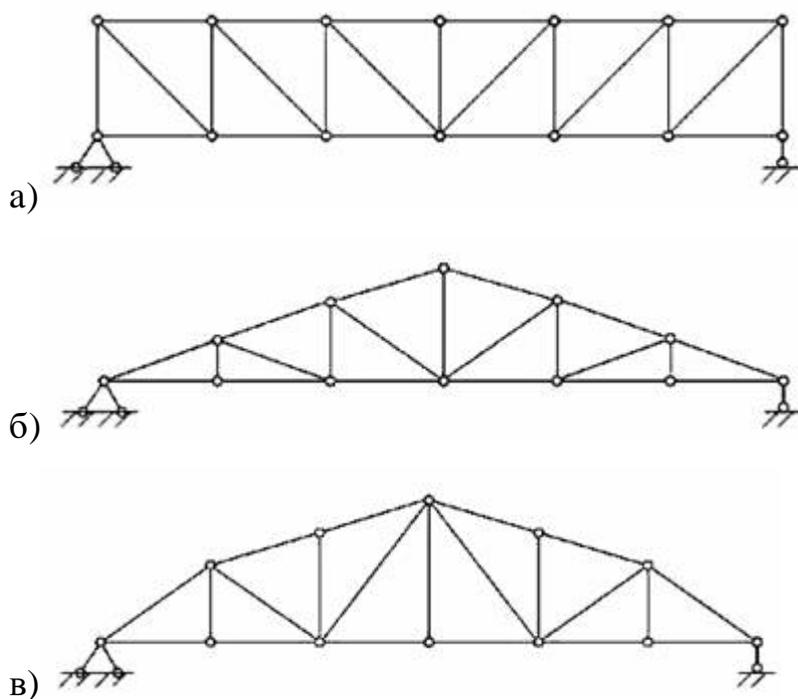


Рис.1

Фермы, как правило, проектируют таким образом, чтобы основная нагрузка на них передавалась через узлы верхнего или нижнего пояса. Наличие шпренгелей позволяет увеличить количество узлов в этом поясе, что может потребоваться для облегчения конструкций, с помощью которых внешняя нагрузка передается на узлы фермы или, например, для уменьшения ширины плит перекрытий, опирающихся на стропильные фермы здания.

### Геометрическая неизменяемость ферм

Для обеспечения геометрической неизменяемости необходимо, во-первых, чтобы связей, наложенных на перемещение узлов фермы было достаточно, во-вторых, они были правильно размещены. Следовательно, исследование геометрической неизменяемости фермы состоит из двух шагов: проверки достаточности числа связей и анализе правильности их размещения (*структурном анализе фермы*).

Как обычно, при анализе геометрической неизменяемости смещения, вызванные деформированием стержней в расчет не берутся. Иными словами, при анализе геометрической неизменяемости ферм, как и любых других стержневых систем, будем считать стержни абсолютно жесткими.

Каждый узел плоской фермы имеет две степени свободы, т.е. имеет возможность линейного смещения, например, в вертикальном и горизонтальном направлениях. Следовательно, минимальное количество связей, необходимых для закрепления узлов фермы от смещений, должно равняться удвоенному числу узлов. Часть из этих связей должна обеспечивать закрепление фермы относительно основания. Таким образом, минимальное число стержней в ферме, необходимое для обеспечения ее геометрической неизменяемости определяется по формуле:

$$N=2n_{\text{узел}} -n \quad (1)$$

где  $N$  - число стержней в ферме,  $n_{\text{узел}}$  -число узлов, а  $n$ -число опорных связей.

Условие (1) одновременно является условием статической определимости фермы. Действительно, для каждого узла можно составить два уравнения равновесия- условия равенства нулю проекций на вертикальную и горизонтальную оси всех действующих на узел внешних сил и сил, действующих со стороны стержней и реакций опор. Неизвестными же являются продольные усилия в каждом стержне и реакции в опорах. Записав все эти уравнений, получим систему уравнений, которую в матричной форме можно записать в виде:

$$AX=B, \quad (2)$$

где  $X$  - вектор неизвестных усилий в стержнях и опорных связях,  $B$  - вектор проекций внешних нагрузок на узлы,  $A$  - матрица системы.

Для того, чтобы система (2) была замкнутой, необходимо чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных, т.е. выполнялось условие (1).

Если количество стержней в ферме будет больше, чем требуется согласно (1), то ферма будет статически неопределимой, если меньше - то геометрически изменяемой.

При этом, важно отметить, что условие (1) является необходимым, но не достаточным для обеспечения геометрической неизменяемости. Как уже упоминалось, кроме обеспечения необходимого числа связей, требуется их правильное размещение.

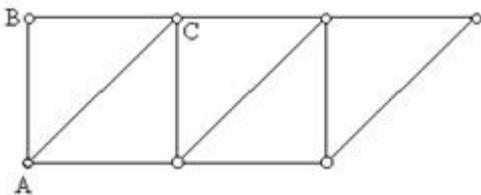


Рис.2

Систему, в которой невозможны взаимные смещения узлов, в предположении, что все стержни абсолютно жесткие, называют *жестким диском*. В шарнирном треугольнике (например,  $ABC$  на рис.2) взаимное смещение узлов будет невозможным, следовательно он является жестким диском. Присоединение к такому треугольнику еще одного узла двумя не лежащими на одной прямой связями приведет к образованию системы, в которой также взаимные смещения узлов будут невозможны. Если продолжить этот процесс, то полученная система также будет жестким диском. Примером жесткого диска является *простейшая ферма*, т.е. ферма, состоящая из шарнирных треугольников (рис.2). Взаимные смещения узлов в такой фермы невозможны. Остается только позаботиться о прикреплении полученной простейшей фермы к основанию.

Для того, чтобы обеспечить неподвижность простейшей фермы относительно основания, необходимы как минимум три опорных связи, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке.

### Статический расчет фермы

Статический расчет фермы заключается в определении реакций в ее опорах и нахождении усилий в ее стержнях.

Для статически определимых ферм для решения данной задачи, как известно, достаточно только уравнений равновесия. Составив для каждого узла по два уравнения равновесия проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси, получим замкнутую систему уравнений (2), решив которую найдем усилия во всех стержнях фермы и реакции опор. Данный алгоритм может быть относительно просто реализован в виде программы для ЭВМ. Кроме того, статический расчет фермы может быть выполнен с применением программных комплексов на основе *метода конечных элементов*.

В то же время, при расчете ферм с небольшим количеством стержней, а также при проверке результатов расчетов, полученных на ЭВМ, может потребоваться использование простейших приемов определения усилий в стержнях ферм. К ним относятся способ вырезания узлов, способ сечений (проекции) и метод моментной точки.

Способ вырезания узлов уже использовался нами при статическом анализе геометрической неизменяемости фермы. Он заключается в мысленном вырезании узла фермы с заменой действия на него стержней соответствующими усилиями. Эти усилия связаны между собой и приложенной к стержню внешней нагрузкой (или опорными реакциями) посредством статических уравнений равновесия. Для любого узла можно составить два таких уравнения - равенства нулю суммы проекций всех сил, например, на вертикальную и горизонтальную оси. Очевидно, если в узле

сходятся два стержня, то из этих уравнений могут быть найдены усилия в обоих из них. Если узел соединяет три стержня, но усилие в одном из них уже найдено из рассмотрения равновесия другого узла или использованием способа сечений, то из этих двух уравнений могут быть найдены усилия в двух оставшихся стержнях.

Способ сечений состоит в мысленном рассечении фермы на две части и рассмотрении равновесия одной из них. При этом действие отбрасываемой части на рассматриваемую должно быть заменено усилиями в стержнях ферм. Если провести сечение таким образом, чтобы оно проходило через три стержня, то можно составить уравнения равновесия для рассматриваемой части фермы таким образом, чтобы найти усилия во всех трех стержнях.

Способ моментной точки заключается в составлении уравнений равновесия в виде суммы моментов всех сил, действующих слева или справа от моментной точки. Моментная точка для искомого усилия – точка пересечения двух остальных усилий, попадающих в сечение.

Для фермы вводятся следующие ограничения:

- 1) все стержни фермы являются абсолютно твердыми и прямолинейными;
- 2) весом стержней пренебрегают, считая их невесомыми;
- 3) внешние силы приложены только в узлах фермы;
- 4) все узлы фермы – идеальные шарниры, то есть трением в шарнирах пренебрегают.

Такие ограничения не вполне соответствуют действительности (в реальных фермах стержни соединены не идеальными шарнирами, а посредством сварки или заклёпок, стержни весомы, внешние силы не обязательно приложены к узлам и т.д.). Однако такие допущения облегчают расчёт фермы, а результаты вычисления при этом вполне пригодны для практики.

Замена реальной фермы некоторой абстрактной моделью приводит к тому, что стержни фермы будут подвержены только растя-

гивающим или сжимающим усилиям, направленным вдоль стержней.

Прежде чем приступить к расчёту фермы, необходимо выяснить, является ли заданная ферма статически определимой (число неизвестных в задаче не должно превышать числа уравнений равновесия). Условие статической определимости можно легко получить из следующих соображений. Так как ферма плоская, то система всех внешних сил и сил реакции при определении опорных реакций будет являться плоской произвольной системой сил, для которой можно записать три уравнения равновесия и, следовательно, число неизвестных не может быть больше трёх. Кроме того, в каждом стержне фермы действует неизвестная по величине и направлению внутренняя сила. Таким образом, всего неизвестных в задаче может быть  $m + 3$ , где  $m$  – число стержней. Действие внутренних сил можно определить, мысленно вырезая каждый узел. В силу ограничений, наложенных на ферму, о которых говорилось выше, к каждому узлу будет приложена плоская сходящаяся система сил, для которой можно записать два уравнения равновесия. Так как узлов в ферме  $n$ , то всего уравнений равновесия для всех узлов будет  $2n$ . Приравнявая число неизвестных к числу уравнений равновесия, получим формулу

$$m + 3 = 2n \text{ или } m = 2n - 3.$$

Эта формула представляет собой условие статической определимости задачи, и она совпадает с формулой (1). Таким образом, формула (1) одновременно является условием жёсткости и статической определимости фермы.

Для того чтобы рассчитать ферму, необходимо последовательно выполнить следующие этапы:

- а) внимательно изучить условия задачи;
- б) проверить ферму на жёсткость и статическую определимость;

- в) определить опорные реакции фермы;
- г) произвести проверку полученных значений опорных реакций;
- д) выбрать метод расчёта усилий в стержнях фермы и с его помощью найти усилия во всех стержнях фермы по величине и направлению.

Для расчёта усилий во всех стержнях существует две группы методов расчёта – аналитические и графические. К аналитическим относятся: 1) способ вырезания узлов; 2) метод сквозных сечений; 3) метод моментной точки [2, стр. 101]. К графическим – 1) построение силовых многоугольников для каждого узла; 2) построение диаграммы Максвелла–Кремоны.

### **МЕТОД ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ (АНАЛИТИЧЕСКИЙ)**

Основная идея этого способа заключается в том, что если вся ферма находится в равновесии, то и каждый её узел также находится в равновесии. Усилия во всех стержнях определяются последовательным вырезанием всех узлов фермы. Причём при переходе к следующему узлу выполняется аксиома сил действия и противодействия для усилий в стержнях, определённых ранее.

Как уже говорилось выше, в силу ограничений, наложенных на ферму, все внешние силы и силы реакций рассечённых стержней (эти силы реакций по модулю равны внутренним усилиям в стержнях) будут представлять собой для каждого вырезанного узла плоскую сходящуюся систему сил, для которой можно записать два уравнения равновесия. Следовательно, можно рассчитывать усилия в стержнях только в таких узлах, в которых содержится **не более двух стержней, усилия в которых неизвестны**, независимо от того, сколько стержней закреплено в узле. Учитывая это, узлы, с которых можно начинать расчёт усилий в стержнях фермы, должны содержать только два стержня. Например, в ферме, представленной

для расчетов[1,стр.8,рис.3], такими узлами могут быть только узел I и узел VII, так

как остальные узлы содержат более двух неизвестных. После того, как усилия в стержнях выбранного узла найдены, переходят на следующий узел, удовлетворяющий вышесказанным требованиям. Как правило, это один из двух соседних узлов по отношению к узлу, в котором внутренние силы в стержнях уже определены .

Так как при расчёте усилий в стержнях, принадлежащих какому-либо узлу, заранее неизвестно, какие усилия в нем действуют – сжимающие или растягивающие, то условно предполагается, что во всех рассеченных стержнях усилия растягивающие, то есть направленные в каждом стержне от узла. В результате расчета те усилия, которые будут иметь знак "+" окажутся растягивающими, со знаком "-" сжимающими (направленными в узел).

Основное достоинство этого способа заключается в том, что он прост и универсален, позволяет найти усилия во всех стержнях фермы. Основным недостатком является отсутствие текущего контроля правильности вычислений. Их верность подтверждается только при расчёте последнего узла, когда усилия во всех его стержнях уже найдены и остается только подтвердить, что он находится в равновесии . Этот узел обычно называют контрольным узлом.

## **ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ МАКСВЕЛЛА-КРЕМОНЫ**

Все основные идеи этого способа аналогичны идеям графического способа вырезания узлов. Но заметим:

применяя графический способ вырезания узлов, вектор усилия каждого стержня приходится строить дважды. В связи с этим значительно возрастает количество операций, и как результат – точность полученных результатов снижается.

Эти недостатки устраняются в графическом построении, на-

зывается диаграммой Максвелла–Кремоны. Такой способ решения задачи был разработан английским физиком Максвеллом в 1864 г. и независимо от него итальянским математиком Кремоной в 1872 г.

Для построения диаграммы, кроме определения реакций связей, необходимо предварительно сделать следующее:

- а) ферму построить строго в масштабе, точно откладывая углы;
- б) расставить все внешние силы (активные и силы реакции) **вне контура фермы**.

Оригинальность метода состоит в специфическом обозначении всех внешних и внутренних усилий. Для этого ферма разбивается на области (или поля).

*Область* фермы называется часть плоскости, в которой лежит ферма, ограниченная линиями действия сил.

Область называется *внешней*, если она ограничена линиями действия внешних сил.

Область называется *внутренней*, если она ограничена линиями действия внутренних сил.

При разбиении фермы на внешние области заранее выбирается направление обхода фермы по или против хода часовой стрелки. В нашем случае – по ходу часовой стрелки. Обозначение внешних полей можно начинать с любой из них. Затем, двигаясь по часовой стрелке и пересекая линию действия следующей внешней силы, ставится следующая буква и т. д. Таким образом, получим [1, рис.7] внешние поля  $A, B, C, D, E, F, G$ . В результате такой разбивки все внешние силы при обходе по часовой стрелке будут обозначаться двумя буквами, например, реакция  $A X$  запишется в виде  $B A$ , сила  $1 P - C B$  и т. д.

Для того чтобы также записывать все внутренние усилия, далее обозначаются внутренние поля фермы:  $H, K, L, M, O, N$ .

Построение диаграммы начинается с построения так называемого

мого опорного многоугольника всех внешних сил, являющегося замкнутым (ферма находится в равновесии).

причем силы в этом уравнении записываются только в том порядке, в каком они встречаются при обходе контура фермы. Многоугольник внешних сил строится в предложенном порядке, откладывая первый вектор  $A$   $Y$  от произвольной точки плоскости в некотором выбранном масштабе сил.

Силы в диаграмме обозначаются по концам маленькими одноименными буквами, соответствующими обозначениями полей, между которыми лежат эти силы.

*В дальнейшем к этому опорному многоугольнику достраиваются замкнутые силовые многоугольники последовательно вырезаемых узлов с учетом всех требований графического метода вырезания узлов, из которых и определяются искомые усилия по величине и направлению.*

*Составляются условия равновесия последовательно вырезаемых узлов, позволяющих строить силовые многоугольники узлов:*

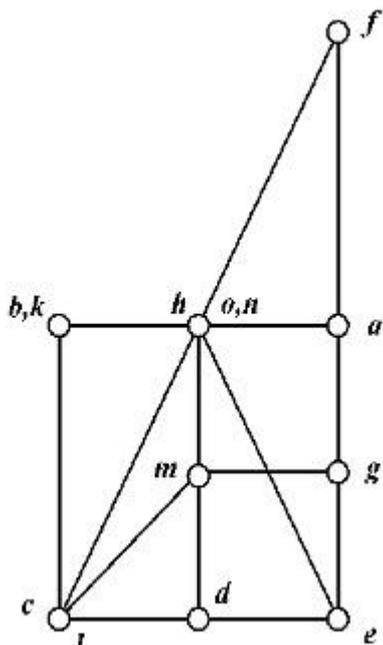
строая силовые многоугольники узлов фермы, необходимо иметь в виду, что каждый узел обходится в выбранном направлении обхода фермы (по часовой стрелке) и силы в уравнениях равновесия записываются строго в порядке обхода узла так, чтобы неизвестные усилия в этих уравнениях были последними.

Согласно записанным выше уравнениям равновесия достраивается диаграмма Максвелла–Кремоны

Исследуя векторные уравнения равновесия узлов, обратим внимание на то, что каждое внутреннее усилие на диаграмме строится только 1 раз. Например, строя силовой многоугольник узла  $I$  и находя усилие  $s$   $n$  увидим, что второй раз не надо рисовать, так как оно уже известно, и во втором уравнении оно обозначено  $n$   $s$ , то есть развернуто в противоположную сторону и на диа-

грамме уже присутствует.

На диаграмме, изображаются векторы всех внешних и внутренних усилий фермы в выбранном масштабе.



Как можно определить усилие в любом стержне фермы по знаку и величине, используя диаграмму?

Каждый стержень принадлежит двум узлам. Например, стержень 7 (он делит поля  $L$  и  $M$ ) принадлежит IV и VI узлам. Пусть он принадлежит IV узлу. Тогда усилие в этом стержне при обходе по часовой стрелке будет обозначаться  $LM$  (уравнение равновесия IV узла). На диаграмме это усилие будет обозначаться  $lm$ . Движение по диаграмме от  $l$  к  $m$  соответствует на ферме движению по стержню от узла, следовательно, это усилие растягивающее и имеет знак "+". Модуль усилия найдем, измерив длину отрезка  $lm$  и умножив его на масштабный коэффициент (0,5 кН/см).

Аналогично находим усилия во всех остальных стержнях фермы.

### Пример расчёта ферм на неподвижную нагрузку

Выполним статический расчет фермы, изображенной на рис.3

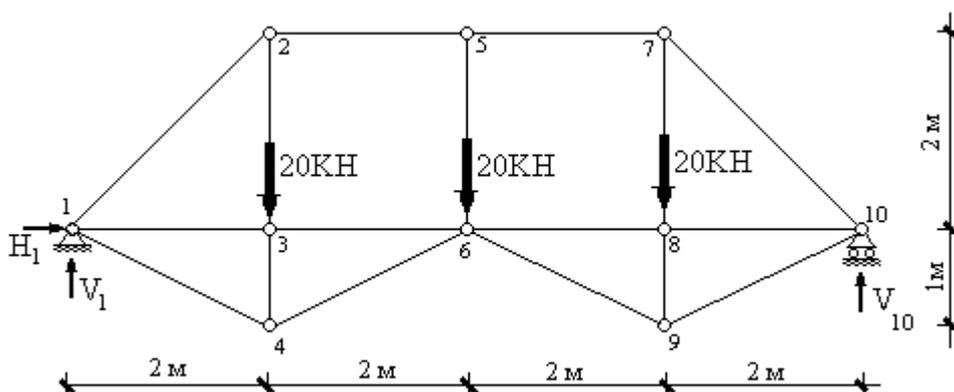


Рис.3

**Пример 1.** Для данной фермы необходимое условие статической неопределимости и геометрической неизменяемости фермы выполняется.

Теперь исследуем правильность расстановки связей в ферме. Данная ферма образована двумя жесткими дисками. Контур первого из них ограничен узлами 1,4,6,5,2. Действительно, жесткий диск образован тремя шарнирными треугольниками, к которым двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, присоединен узел 5. Второй диск, контур которого ограничен узлами 6,8,7,10,9, также образован тремя шарнирными треугольниками, т.е. представляет собой простейшую ферму. Два диска соединены между собой тремя связями, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке, - в узле 6 и стержнем 5-7. Таким образом, вся конструкция также представляет собой жесткий диск. Он прикреплен к основанию тремя связями, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке. Следовательно, на основе структурного анализа можно сделать вывод, что данная ферма является геометрически неизменяемой.

Определим опорные реакции в ферме. Горизонтальная нагрузка на систему отсутствует, следовательно горизонтальная реакция в левой опоре равна нулю  $H_1 = 0$ . Поскольку данная ферма симметрична и находится под действием симметричной нагрузки, очевидно, вертикальные

реакции  $V_1$  и  $V_{10}$  должны быть равными. Найдем их из уравнения проекций всех действующих на систему сил на вертикальную ось:  $V_1 + V_{10} = 3 \cdot 20$  кН. Следовательно,  $V_1 = V_{10} = 30$  кН.

Теперь приступим к определению усилий в стержнях фермы. Прежде всего выделим нулевые стержни. Из рассмотрения узла 5 на основании признака 2 нулевых стержней следует, что стержень 5-6 нулевой.

Мысленно разрежем ферму сечением, изображенным на рис.4.37 и рассмотрим равновесие левой части. Напомним, что положительное значение продольного усилия соответствует растяжению стержня, а отрицательное - сжатию. Поэтому при составлении уравнений равновесия будем считать неизвестные стержневые усилия растягивающими.

Из уравнения моментов относительно точки  $A$ :  $30\text{кН} \cdot 4\text{м} - 20\text{кН} \cdot 2\text{м} + N_{2-5} \cdot 2\text{м} = 0$  находим  $N_{2-5} = -40\text{кН}$ , а из уравнения моментов относительно точки  $B$  (ее положение легко определяется из подобия треугольников  $A43$  и  $ABC$ )  $30\text{кН} \cdot 8\text{м} - 20\text{кН} \cdot 6\text{м} - N_{3-6} \cdot 2\text{м} = 0$  находим  $N_{3-6} = 60\text{кН}$ .

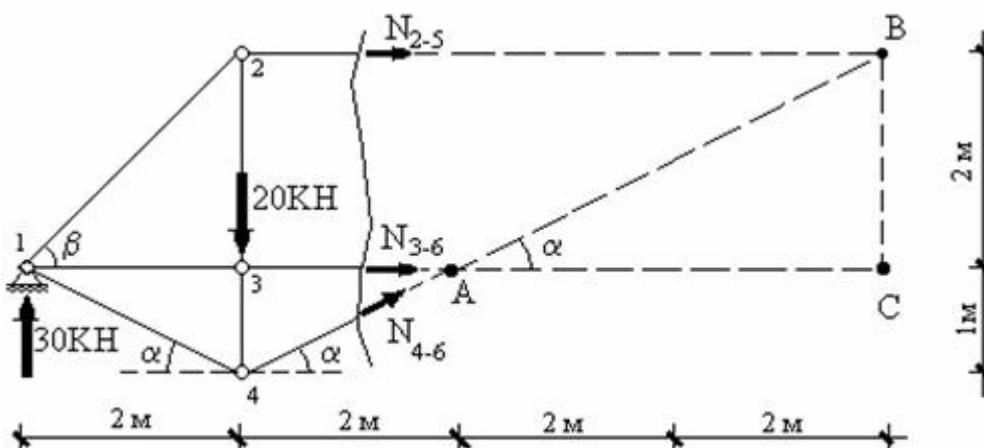


Рис.4

Усилие  $N_{4-6}$  можно определить из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось  $30\text{кН} - 20\text{кН} + N_{4-6} \cdot \sin\alpha = 0$ . Угол можно определить, например, из треугольника  $ABC$ :

Следовательно,

Усилия в остальных стержнях левой половины фермы можно найти, например вырезанием узлов 2, 3 и 4.

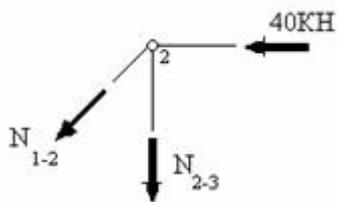


Рис.5

Рассмотрим равновесие узла 2 (рис.5). Он соединяет три стержня, но в одном из них усилие уже найдено - усилие в стержне 2-5 является сжимающим и равно 40кН. Следовательно, двух уравнений равновесия этого узла будет достаточно, чтобы определить усилия в двух других стержнях. Из треугольника 123 следует, что  $\beta = 45^0$ . Составим уравнения проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси:

и . Сопоставляя эти два уравнения, учитывая, что , получим:  $N_{2-3} = 40 \text{ кН}$  .

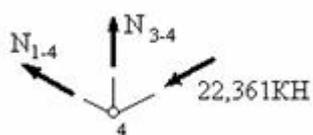


Рис.6

Рассмотрим равновесие узла 4 (рис.6). Он также соединяет три стержня, но в одном из них усилие уже найдено - усилие в стержне 4-6 является сжимающим и равно 22,361 кН. Следовательно, двух уравнений равновесия этого узла будет достаточно, чтобы определить усилия в двух других стержнях. Из уравнения проекций сил на горизонтальную ось следует:  $N_{1-4} = -22,361 \text{ кН}$ .

Из уравнения проекций сил на вертикальную ось

следует:  $N_{3-4} = 2 \cdot$

$$22,361 \text{ кН} \cdot \sin 26,565^\circ = 22,361 \text{ кН} \cdot 0,4472 \cdot 2 = 20 \text{ кН}.$$

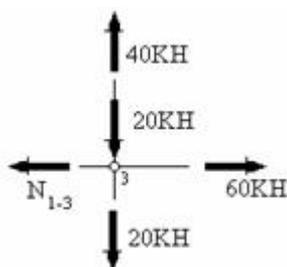


Рис.7

Теперь рассмотрим равновесие узла 3 (рис.7). Усилия в трех стержнях из четырех, соединяющихся в этом узле, уже известны. Из уравнения проекций всех сил на горизонтальную ось находим  $N_{1-3} = 60 \text{ кН}$ . Запишем уравнение проекций сил на вертикальную ось:  $40 \text{ кН} = 20 \text{ кН} + 20 \text{ кН}$ . Полученное равенство является истинным, что подтверждает правильность полученных значений усилий в стержнях ферм.

Итак, значения усилий в стержнях левой половины фермы определены. Усилия в стержнях на правой половине фермы находятся исходя из симметрии фермы и симметричности приложенной к ней нагрузки. Значения усилий (кН), определенные в результате расчета, приводятся на рис.8.

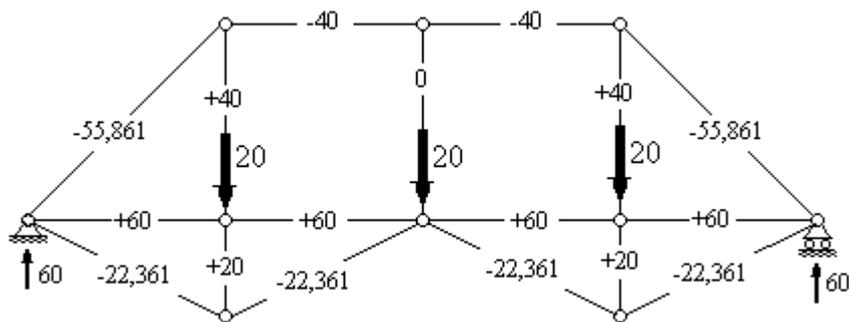


Рис.8

Проверки правильности определения усилий в стержнях фермы также можно осуществить вырезанием узлов или использованием способа сечений.

## Другие способы определения усилий в фермах

Рассмотренные выше способы определения усилий (способ вырезания узлов и способ сечений) можно отнести к основным способам расчета ферм.

Однако в некоторых случаях ни один из них не приводит к желаемому результату, и тогда приходится прибегать к другим способам расчета. Рассмотрим некоторые из них.

### Способ замкнутого сечения

Пусть требуется определить усилия в стержнях фермы Шухова (рис.9)[2,стр.106]. Применение способа вырезания узлов нецелесообразно, так как здесь нет узлов, в которых сходились бы только два стержня с неизвестными усилиями, и нельзя использовать способ проекций, так как невозможно провести сечение через три стержня.

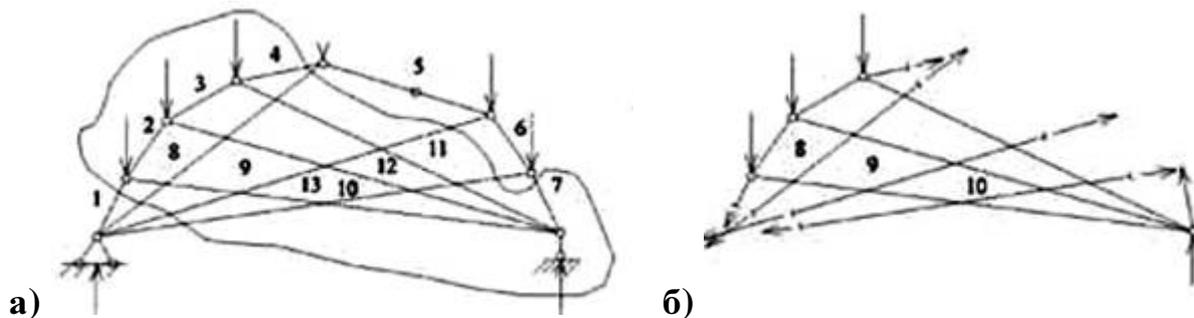


Рис.9

Проведем замкнутое сечение так, чтобы три стержня (1, 4, 7) пересекались по одному разу, а стержни 8, 9, 10 – по два раза. Рассмотрим равновесие отсеченной части фермы внутри замкнутого контура (рис.9,б). Усилия в стержнях 8, 9, 10, перерезанных замкнутым сечением дважды, уравниваются. А усилия в стержнях 1, 4, 7 можно определить способом

моментной точки, после чего легко определить усилия в остальных стержнях фермы.

### **Способ совместных сечений**

Применение этого способа приводит к системе двух уравнений с двумя неизвестными [3, стр.35]. Способ используется в тех случаях, когда удастся провести два сечения таким образом, что каждое из них содержит четыре неизвестных, причем какие-то два неизвестных усилия повторяются в обоих сечениях.

### **Распределение усилий в элементах ферм различного очертания**

Перед проектировщиком может встать задача выбора фермы наиболее рациональной конструкции. Под наиболее рациональной понимается такая конструкция, при которой усилия в стержнях фермы оказываются минимальными, что позволяет уменьшить расход материала, а значит и ее собственный вес. Кроме того, необходимо принимать во внимание вопросы, связанные с технологией изготовления, транспортировки и монтажа конструкций ферм.

Рассмотрим четыре фермы, перекрывающие один и тот же пролет -30 м, имеющие одинаковую высоту в середине пролета – 5 м, характеризующиеся одним и тем же числом панелей- 6 и находящиеся под действием одной и той же нагрузки - ко всем узлам верхнего пояса приложены направленные вертикально вниз силы величиной 10 кН, а ко всем узлам нижнего пояса – 30 кН.

Первая ферма - с параллельными поясами и нисходящими раскосами (рис.10), вторая - с параллельными поясами и треугольной решеткой с дополнительными вертикальными стойками (рис.11), третья - с параболическим очертанием верхнего пояса и нисходящими раскосами

(рис.12), четвертая - треугольная стропильная ферма с нисходящими раскосами (рис.13). На рисунках приводятся значения усилий (кН) в стержнях ферм, полученные в результате их статического расчета.

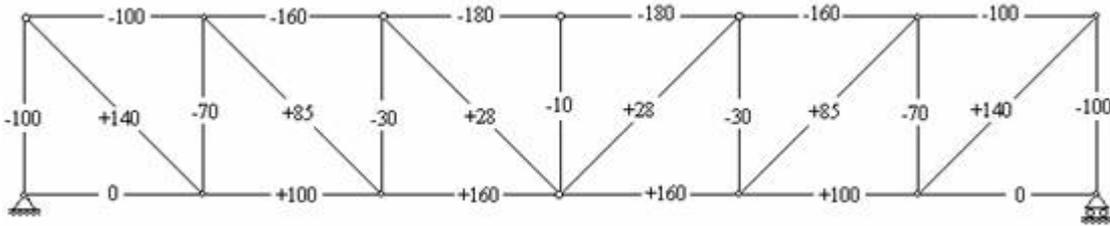


Рис.10

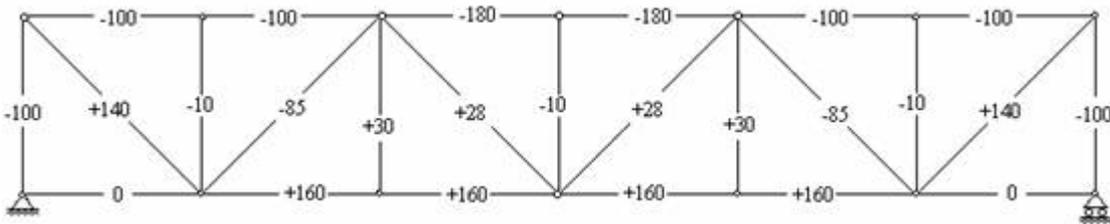


Рис.11

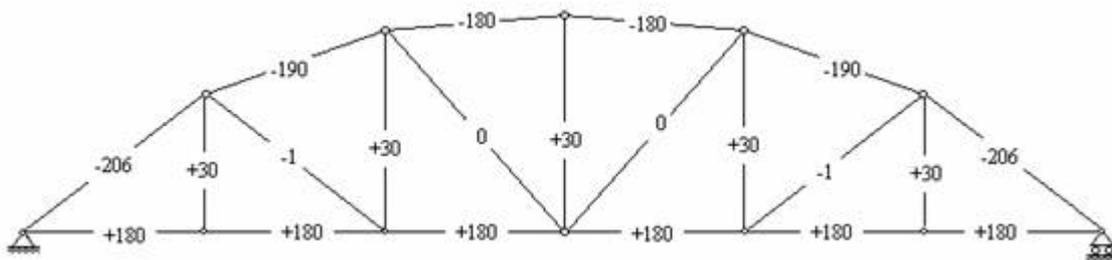


Рис.12

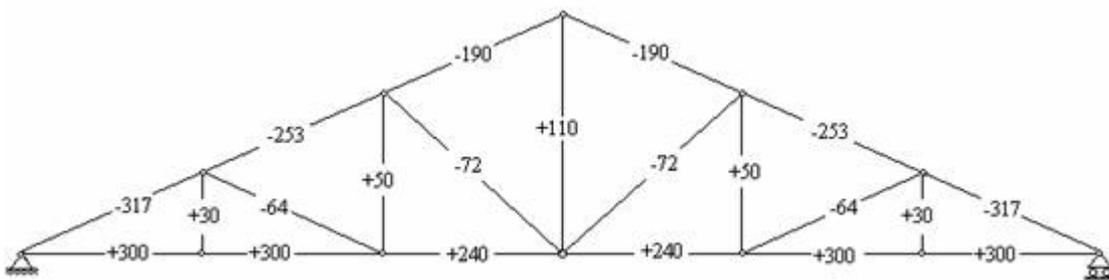


Рис.13

Как и следовало ожидать, стержни верхнего пояса во всех четырех случаях оказались сжатыми, а нижнего - растянутыми.

В балочных фермах с параллельными поясами в стержнях верхнего и нижнего поясов усилия увеличиваются от опор к центру пролета. Поэтому, если стержни верхнего и нижнего поясов выполняются постоянного по длине пролета сечения, то материал стержней поясов вблизи опор используется нерационально. Изготовление же стержней поясов фермы переменного по длине фермы сечения обычно является нерациональным из технологических соображений. Поэтому фермы с параллельными поясами не используют при очень больших пролетах и нагрузках, когда задача экономии материала и облегчения конструкции фермы приобретает особую важность.

Нисходящие раскосы в фермах с параллельными поясами работают на растяжение, восходящие - на сжатие, причем замена раскоса с нисходящего на восходящий приводит к изменению знака усилия в нем, но абсолютная величина усилия остается постоянной.

Балочные фермы с параболическим очертанием верхнего пояса лишены основного недостатка ферм с параллельными поясами. Усилия в стержнях нижнего пояса постоянны по длине пролета, а верхнего пояса - меняются незначительно. Раскосы в такой ферме вообще практически не работают. То есть ферма этого типа представляется наиболее выгодной с точки зрения напряженного состояния. В то же время технология такой фермы несколько сложнее. Поэтому фермы с параболическим или близким к нему, трапецеидальным очертанием верхнего пояса используют для перекрытия весьма больших пролетов и при действии достаточно высокой нагрузки.

В треугольной ферме величины усилий в стержнях заметно выше, чем в фермах других типов. Усилия в верхнем и нижнем поясах распределены крайне неравномерно по длине пролета, увеличиваясь от середины пролета к опорам. Таким образом, треугольные фермы являются наименее выгодными по сравнению с фермами других типов. Их имеет смысл использовать там,

где применение ферм других типов нерационально по конструктивным соображениям, например, в качестве стропильных ферм в двускатных зданиях небольшой ширины.

## ПРИЛОЖЕНИЯ.

Программа для ANSYS расчета ферм версии 5.3 , работающая под управлением операционных систем Windows[4].

### Пример расчета фермы[4].

В данной задаче *требуется определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы*, показанной на рис. вместе с действующими в узлах силами.

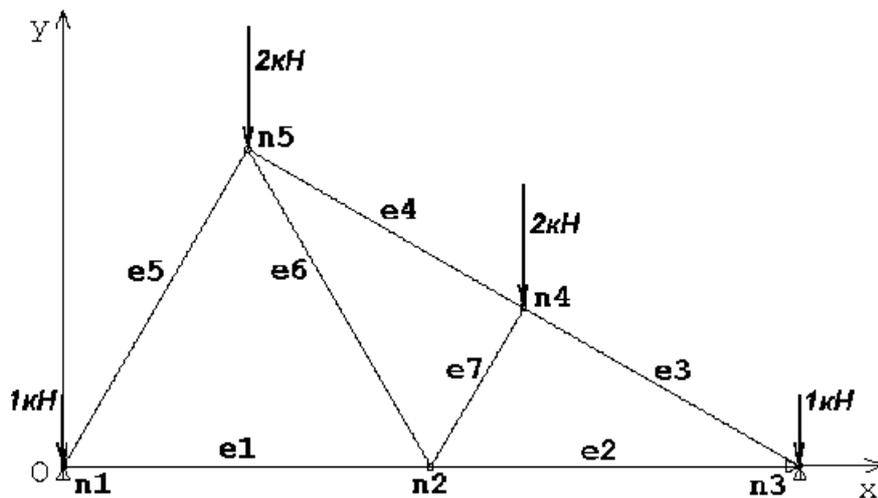


Рис. 1

Отнесем ферму к декартовой системе координат  $Oxy$  (рис. 1), и по рисунку, приведенному в задачнике, рассчитаем координаты ее узлов. На рис. 1 узлы фермы обозначены метками  $n1, \dots, n5$ . Эти узлы имеют следующие координаты (в м):  $n1 - (0;0)$ ,  $n2 - (2;0)$ ,  $n3 - (4;0)$ ,  $n4 - (2.5; \sqrt{3}/2)$ ,  $n5 - (1; \sqrt{3})$ .

Как известно, ферма есть конструкция, состоящая из стержней, соединенных между собой шарнирами (узлами фермы). Поскольку силы, действующие на ферму, прилагаются в шарнирах, то все стержни фермы испытывают только осевые усилия растяжения - сжатия. Следовательно, подходящими КЭ для стержней ферм являются стержневые элементы LINK1 в случае плоских ферм и LINK8 в случае пространственных ферм. Узлы конечно-

элементной модели будут тогда совпадать с узлами фермы, а каждый стержень будет отдельным КЭ.

Приведенная на рис. 1 ферма с количеством стержней  $N=7$  и количеством узлов  $n=5$  является статически определимой, так как для нее выполняется условие статической определимости плоских ферм:  $N=2n-3$ . Данную задачу можно решать методами строительной механики, и тогда не существенны никакие определяющие параметры стержней, кроме их длин. Однако, для КЭ LINK1 (или LINK8) требуется задать по крайней мере одно материальное свойство (модуль Юнга  $E$ ) и одну константу КЭ (площадь поперечного сечения  $AREA$ ). Примем произвольно, что для всех стержней фермы  $E = 2 \cdot 10^{11}$  (н/м<sup>2</sup>) и  $AREA = 1 \cdot 10^{-4}$  (м). Отметим, что в рассматриваемой статически определимой задаче значения этих параметров не будут влиять на итоговые искомые величины, подлежащие определению.

Приведем листинг простой программы для ANSYS, предназначенной для решения описанной задачи в пакетном режиме BATCH. Строки программы здесь пронумерованы последовательно для удобства дальнейших комментариев. В компьютерном файле нумерация строк должна отсутствовать.

```
1 /BATCH
2 /COM,          Файл SMs1.inp
3 /COM,          Пример расчета плоской фермы
4 /COM, (Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.
5 /COM, М.: Наука, 1986. Задача 4.67(5.7))
6 F_R='SMs1'    ! Имя файла для вывода результатов
7 /PREP7
8 ET,1,LINK1    ! Стержневой КЭ LINK1
9 R,1,1e-4      ! Площадь поперечного сечения стержней AREA=1e-4 (произвольная)
10 MP,EX,1,2E11 ! Модуль Юнга материалов стержней EX=2e11 (произвольный)
11 S3=SQRT(3)
12 N,1,0,0     ! Определяем узлы по координатам на плоскости
13 N,2,2,0
14 N,3,4,0
15 N,4,2.5,S3/2
16 N,5,1,S3
17 E,1,2       ! Определяем элементы текущего типа TYPE=1 (LINK1)
18 E,2,3       ! с текущими наборами констант REAL=1
19 E,3,4       ! и материальных свойств MAT=1
20 E,4,5       ! по номерам граничных узлов
21 E,5,1
```

```

22 E,5,2
23 E,2,4
24 FINISH
25 /SOLU
26 ANTYPE,STATIC ! Статический анализ
27 ! Определяем шарнирные опоры в узлах
28 D,1,UY,0,,3,2 ! UY=0 в узлах 1 и 3
29 D,3,UX ! UX=0 в узле 3
30 ! Задаем силы в узлах
31 F,1,FY,-1E3,,3,2 ! FY=-1e3 в узлах 1 и 3
32 F,4,FY,-2E3,,5 ! FY=-2e3 в узлах 4 и 5
33 SOLVE ! решаем СЛАУ
34 FINISH
35 /POST1
36 /OUTPUT,F_R,res ! Направляем вывод в файл <F_R>.res
37 PRRSOL ! Печатаем опорные реакции
38 PRESOL,SMISC,1 ! Печатаем усилия в стержнях
39 /OUTPUT
40 FINISH
41 /EXIT

```

В результате работы программы в файле SMs1.res будут находиться искомые величины.

Таблица 1.

Номер узла		1	3
Реакции в узлах (кН)	Ответ из задачника	3.25	2.75
	ANSYS	3.25	2.75

Таблица 2.

Номер стержня		1	2	3	4	5	6	7
Усилия (кН)	Ответ из задачника	1.3	3.03	-3.5	-2.5	-2.6	1.73	-1.73
	ANSYS	1.299	3.0311	-3.5	-2.5	-2.5981	1.7321	-1.7321

Дадим дополнительные комментарии по программе SMs1.inp, а также по общей методике расчета ферм на ANSYS.

Операторами с номерами 6 и 11 вводятся и инициализируются скалярные параметры F\_R и S3. Параметру F\_R присваивается строковая константа 'SMs1', а параметру S3 - действительная константа  $\sqrt{3}$ . Оператор 8 определяет элементный тип TYPE со ссылочным номером 1 (TYPE=1) как стержневой КЭ LINK1; оператор 9 - набор элементных констант (Real Constants) со ссылочным номером 1 (REAL=1), состоящий здесь из одной

константы  $1e-4$ . Оператор 10 задает физическое свойство  $E_X=2e11$  и относит это значение к набору материальных свойств (Material Properties) со ссылочным номером 1 (MAT=1).

Операторы 12-16 последовательно определяют узлы (Nodes) с номерами 1-5 по двум координатам X и Y в текущей глобальной декартовой системе координат. Операторы 17-23 задают конечные элементы по номерам узлов. В отличие, например, от команды определения узлов N, в команде E нет поля для номера элемента. При выполнении команды E создаваемому КЭ автоматически присваивается номер КЭ, равный максимальному номеру из множества занумерованных элементов + 1. При создании элемента с ним связываются также текущие или принятые по умолчанию значения из множеств MAT, REAL, TYPE и ESYS. (Последнее множество есть множество ссылочных номеров элементных координатных систем.) Так как определены MAT=1, REAL=1, TYPE=1, и эти значения являются текущими по умолчанию, то все элементы, создаваемые по операторам 17-23, будут иметь эти же свойства. Заметим, что материальные свойства MP, константы R и элементные типы ET определяются независимо различными командами, и правильность их задания для отдельных КЭ является задачей пользователя.

После создания конечно-элементной модели функции препроцессора PREP7 выполнены. В решателе SOLUTION определяется статический тип анализа (оператор 26) и задаются условия закрепления и силовые факторы. Согласно принятой в ANSYS концепции, все граничные условия и силовые факторы трактуются как «нагрузки» (Loads). Различаются следующие типы нагрузок: 1) DOF Constraint Loads; 2) Force Loads; 3) Surface Loads; 4) Body Loads и 5) Inertia Loads. Большинство команд для первых четырех классов начинаются с той же самой буквы, с которой начинается и название соответствующего класса (**D**, **F**, **S**, **B**). Нагрузки также подразделяются на два следующих подкласса: нагрузки, приложенные к конечно-элементной модели (Finite Element Loads), и нагрузки, приложенные к геометрической модели (Solid Model Loads). Поскольку в данном примере в построении геометрической

модели не было необходимости, то здесь используются только нагрузки, приложенные к конечно-элементной модели. Команды типа **DOF Constraint Load Commands** связывают определенные степени свободы (**DOF** - degree of freedom) с конкретными значениями. В механике это обычно есть главные граничные условия, накладываемые на перемещения, и возможно, на углы поворота. В нашем примере мы имеем два шарнира в узлах 1 и 3 (рис. 1), причем в узле 1 нет ограничений на перемещения по оси **OX**. Степенями свободы в каждом узле для КЭ **LINK1** являются компоненты вектора перемещений **UX** и **UY**. Тогда, очевидно, что для удовлетворения условиям закрепления в узле 1 надо положить **UX=0**; а в узле 3 - **UX=UY=0**. Эти цели и достигаются операторами 28 и 29 программы **SMs1.inp**. Отметим, что вместо сложного формата оператора 28 можно было бы использовать два оператора (через знак **\$** можно записывать несколько команд в одной строке)

**D,1,UY,0 \$ D,3,UY,0**

причем, как и в операторе 29, в соответствии с правилами умолчания **ANSYS** нуль в поле значений **VALUE** компоненты **DOF** можно опустить: **D,1,UY** и т.д.

Аналогичным образом, операторы 31 и 32 задают значения сосредоточенных сил (**Force**) в определенных узлах. Так как сила является вектором, то для плоской задачи задаются ее компоненты по осям **X** и **Y**. В нашем примере внешние силы направлены против оси **OY**, и следовательно, имеют ненулевыми лишь компоненты **FY**, причем со знаком «минус». Как и для команд **D**, операторы 31 и 32 можно было бы использовать в более простой форме:

**F,1,FY,-1e3 \$ F,3,FY,-1e3**

**F,4,FY,-2e3 \$ F,5,FY,-2e3**

Команда **SOLVE** формирует и решает систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) МКЭ, соответствующую созданной конечно-элементной модели и типу анализа, а также записывает получаемые результаты в базу данных \*.db и файл вывода. Команды опций вывода (**OUTRES** и **OUTPR**) позволяют определять различные типы данных, записываемых в базу или выводимых на печать. По умолчанию принимается **OUTRES,ALL**, т.е.

сохранение всех данных (одношагового) статического анализа в \*.db, и подавление вывода на печать.

Поскольку все данные в результате решения оказываются доступными для обработки, используя главный постпроцессор POST1 и операторы 37, 38, мы можем вывести опорные реакции и усилия в стержнях. Отметим, что целью решения задач является именно получение определенных результатов. О том, какие результаты и в каком виде надо получить, следует думать в самом начале решения задачи. В ряде случаев для этого необходимо устанавливать специальные опции вывода, определять переменные для графиков, проводить дополнительные сервисные вычисления и т.п. Для нашего примера достаточны текстовые результаты. При этом реакции можно вывести по команде 37, а усилия в стержнях - по команде 38. Относительно команды 38 отметим, что поля SMISC,1 определяют именно усилия в стержнях для КЭ LINK1 согласно документации по КЭ LINK1 [6]. Наконец, команда 36 позволяет назначить вывод в желаемый файл, а команда 39 - вернуть вывод в стандартный файл вывода \*.out. Специальный файл вывода SMs1.res используется в данной программе для отсекаания многих ненужных сообщений, создаваемых в процессе выполнения программы.

При желании графическое изображение деформированного состояния фермы можно получить, используя в препроцессоре команду:

**PLDISP,1 ! Показать деформир. состояние вместе с недеформированным**

Однако, перед этим желательно задать вывод графики в файл графического ANSYS-формата, например, в файл <f\_r>.grph по команде:

**/SHOW,f\_r,grph**

Изменяя соответствующим образом файл SMs1.inp, можно создавать программы для расчета разнообразных ферм. При этом для ANSYS безразлично, рассматривается ли статически определимая ферма, или статически неопределимая. Естественно, что в последнем случае существенны значения констант REAL и материальных свойств MAT.

Если в ферме имеются стержни с различными свойствами, то возможно применение следующей стратегии. Пусть, например, стержень 2 выполнен из алюминия с модулем Юнга  $E_X=0.7 \cdot 10^{11}$  (н/м<sup>2</sup>) и площадью поперечного сечения  $AREA=2 \cdot 10^{-4}$  (м). Тогда при задании наборов REAL и MAT следует также определить новые REAL и MAT с номерами, равными, например, 2:

```
R,2,2e-4  
MP,EX,2,0.7e11
```

При определении элементов необходимо активизировать соответствующие наборы REAL и MAT. Таким образом, команды задания элементов 17-19 нужно видоизменить, например, так:

```
E,1,2  
REAL,2 $ MAT,2 $ E,2,3  
REAL,1 $ MAT,1 $ E,3,4
```

(Для элемента E,1,2 текущими значениями атрибутов по умолчанию являются значения, равные 1: MAT=1, REAL=1, TYPE=1, ESYS=1. Перед созданием второго элемента (E,2,3) следует изменить значения MAT и REAL на 2, а для других элементов (E,3,4 и т.д.) - снова вернуться к значениям MAT и REAL, равным 1.)

Если требуется определить узловые силы в узлах фермы, то в командах вывода (например, после команды 37), можно добавить команду, предназначенную для вывода узловых нагрузок (для данного примера - сил):

```
PRNLD
```

Для вывода осевых напряжений, существенных для задач сопротивления материалов, можно в решателе SOLUTION использовать команду:

```
OUTPR,BASIC,1
```

но тогда печать осевых напряжений SAXL будет осуществлена в стандартный файл вывода \*.out. Более сложный, но и более изящный способ - использование следующего фрагмента внутри постпроцессора:

```
/NOPR ! подавление ненужного вывода  
N_EL=7 ! параметр для количества элементов  
*DO,I,1,N_EL ! цикл по элементам  
ESEL,S,ELEM,,I ! выбор элемента с номером I  
ETABLE,SIGAX,LS,1 ! из таблицы ETAB выбираются указатели  
! SIGAX на SAXL согласно документации
```

```
! КЭ LINK1
*GET,SS,ELEM,I,ETAB,SIGAX ! Определяем SS по указателю
/GOPR ! активизация вывода
*VWRITE,I,SS ! выводим номер элемента I и напряжение SS
(1x,' I=',F4.0,' SIGMA_AX=',e10.4)
/NOPR
*ENDDO ! конец цикла по элементам
```

При этом выводная информация будет представлена в наиболее короткой и удобной форме. (Добавьте в этот фрагмент также команды для вывода усилий в стержнях!)

Другим способом вывода усилий и напряжений в стержнях являются следующие команды:

```
ETABLE,FORAX,SMISC,1 ! FORAX - указатель на SMISC,1
ETABLE,SIGAX,LS,1 ! SIGAX - указатель на LS,1
PRETAB,FORAX,SIGAX ! Печать FORAX и SIGAX
```

#### Литература

- 1.Симоненко В.Г. Расчет плоской фермы.-Томск:Томский гос.арх.-строит.университет,2007.-25 с.
- 2.Дарков А.В.,Шапошников Н.Н.Строительная механика.М.:Высшая школа,1986.-607с.
- 3.Леонтьев Н.Н.,Соболев Д.Н.,Амосов А.А.Основы строительной механики стержневых систем.М.:Изд-во Ассоциации строительных вузов,1996.-542 с.
- 2.Наседкин А.В.Конечно-элементное моделирование на основе ANSYS. Программы решения статических задач сопротивления материалов с вариантами индивидуальных заданий // Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1998.- 44 с.